

Studie zur Anwendung von Turbulenzmodellen in Gasturbinenbrennkammern

Vom Fachbereich Maschinenbau
an der Technischen Universität Darmstadt
zur
Erlangung des Grades eines Doktor-Ingenieurs (Dr.-Ing.)
genehmigte

Dissertation

vorgelegt von

Dipl.-Ing. Oliver Haag

aus Fulda

Berichterstatter:	Prof. D. K. Hennecke, Ph.D.
Mitberichterstatter:	Prof. Dr.-Ing. J. Janicka
Tag der Einreichung:	22.08.2003
Tag der mündlichen Prüfung:	02.12.2003

Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Fachgebiet Gasturbinen und Flugantriebe der Technischen Universität Darmstadt. Sie wurde im Rahmen des Graduiertenkollegs *Modellierung und numerische Beschreibung technischer Strömungen* (GK 91) von der Deutschen Forschungsgemeinschaft finanziell gefördert.

Dem Leiter des Fachgebiets, Herrn Prof. D.K. Hennecke, Ph.D., danke ich besonders für die Anregung zur Durchführung dieser Arbeit und das mir damit entgegengebrachte Vertrauen. Die fachliche Betreuung, die Schaffung großzügiger Rahmenbedingungen und nicht zuletzt die Übernahme des Referats sind weitere Voraussetzungen für das Gelingen der Arbeit, für die ich sehr dankbar bin.

Mein Dank gilt auch Herrn Prof. Dr.-Ing. J. Janicka für die Anfertigung des Koreferats. Als Sprecher des Graduiertenkollegs hat er durch sein Engagement und seinen fachlichen Rat großen Anteil an der erfolgreichen Durchführung dieser Arbeit. Gleiches gilt für Herrn Dr. habil. A. Sadiki als Koordinator des Graduiertenkollegs, der durch sein fundiertes Wissen auf dem Gebiet der Turbulenzmodellierung jederzeit wichtige und nützliche Hinweise geben konnte.

Ferner möchte ich mich bei den Herren Dr.-Ing. W. Bauer, Dr.-Ing. F. Menter, Dr.-Ing. T. Esch, Dr.-Ing. H. Grotjans von der Firma AEA Technology GmbH sowohl für die Möglichkeit zur Implementierung der Turbulenzmodelle als auch für die dabei gewährten wertvollen Hilfestellungen bedanken.

Allen Kollegen und Mitarbeitern am Fachgebiet Gasturbinen und Flugantriebe sowie den Kollegen des Graduiertenkollegs gilt mein Dank für die stets wohlwollende Unterstützung und das aufgebrachte Interesse an meiner Arbeit und meiner Person.

Kurzfassung

Detaillierte Kenntnisse der Strömungs- und Mischungsvorgänge in Brennkammern bilden die Grundlage bei der Entwicklung emissions- und verbrauchsarmer Gasturbinenbrennkammern. Die Methode der numerischen Strömungssimulation (CFD) ist dabei ein wertvolles Entwicklungswerkzeug, wenn die Ergebnisse ausreichend genau sind und hinreichend schnell erzielt werden können. Der Einsatz nichtlinearer Wirbelviskositätsmodelle zur Berechnung komplexer turbulenter Strömungen unter brennkammertypischen Bedingungen steht im Mittelpunkt der Arbeit. Turbulenzmodelle dieser Klasse wurden entwickelt, um die positiven Eigenschaften der linearen Wirbelviskositätsmodelle (Robustheit, Schnelligkeit) mit denen der Reynolds-Spannungsmodelle (Vorhersagegenauigkeit in komplexen Strömungen) zu verbinden.

Nach der Vorstellung der Grundgleichungen und möglichen Methoden zur Beschreibung turbulenter Strömungen werden die hier benutzte statistische Beschreibung sowie die im Rahmen dieser Methode notwendigen Ansätze zur Turbulenzmodellierung ausführlicher erläutert. Es erfolgt eine Klassifizierung in algebraische und differentielle Turbulenzmodelle. Es wird gezeigt, dass innerhalb beider Modellklassen lineare und nichtlineare Turbulenzmodelle existieren. Für alle Untergruppen werden Beispiele genannt, die im Hinblick auf den Einsatz zur Strömungsberechnung in Brennkammern von Interesse sind. Es wird vermittelt, warum das komplexe Strömungsfeld in Gasturbinenbrennkammern besondere Anforderungen an die Turbulenzmodellierung stellt.

Das verwendete numerische Verfahren wird vorgestellt und die Implementierung des nichtlinearen algebraischen Modelles dritter Ordnung dargestellt. Anhand einer Analyse wird gezeigt, dass die unzureichende numerische Robustheit des Modells Folge der Kalibration der Modellkoeffizienten ist. Die Bedeutung der Kalibration wird am Beispiel der Strömung durch einen Kanal mit quadratischem Querschnitt demonstriert.

Die für eine Brennkammer relevanten Strömungsformen, die Strahleinblasung und die Drallströmung werden identifiziert und vorgestellt. Anhand gut vermessener Beispielfälle für beide Strömungsformen werden die mit den eingesetzten Turbulenzmodellen erzielten Ergebnisse diskutiert. Abschließend wird die Strahlreiheneinblasung in eine verdrallte Hauptströmung berechnet und mit Messwerten verglichen. Im Ergebnis bestätigt sich, dass unter den gegebenen Bedingungen höherwertige Turbulenzmodelle ihre konzeptionelle Überlegenheit aufgrund mangelnder numerischer Robustheit nicht ausspielen können. In Rahmen der Arbeit hat sich das als quasi-linear bezeichnete Turbulenzmodell als praktikabler Kompromiss zwischen Genauigkeit und Robustheit herausgestellt.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Hintergrund	1
1.2	Numerische Simulation technisch relevanter turbulenter Strömungen	3
1.3	Zielsetzung	7
1.4	Gliederung	7
2	Theoretische Grundlagen	8
2.1	Transportgleichungen	8
2.2	Konstitutive Gleichungen und Vereinfachungen	9
2.3	Behandlung turbulenter Strömungen	14
2.4	Algebraische Modelle	19
3	Drallströmungen	29
3.1	Das Tangentialgeschwindigkeitsfeld	29
3.2	Das Axialgeschwindigkeitsfeld	30
3.3	Die Drallzahl	31
3.4	Taylor-Proudman Theorem	32
3.5	Turbulenz und Drall	32
4	Numerisches Verfahren	38
4.1	Diskretisierung der Geometrie	38
4.2	Diskretisierung der Bilanzgleichungen	39

4.3	Entkopplung von Druck und Geschwindigkeit inkompressibler Strömungen	44
4.4	Berechnung des algebraischen Gleichungssystems	45
4.5	Implementierung der Turbulenzmodelle	46
4.6	Verifikation	48
4.7	Fehleranalyse bei CFD Rechnungen	49
5	Ergebnisse	54
5.1	Grenzschicht der ebenen Platte	54
5.2	Strahleinblasung in eine ebene Querströmung	57
5.3	Drallströmung in einer Brennkammergeometrie	66
5.4	Strahlreiheneinblasung in verdrehte Querströmung	78
6	Berechnung der Brennkammerströmung mit einem Hybridverfahren	93
6.1	Hybridverfahren	94
6.2	Berechnungsergebnisse	95
7	Zusammenfassung und Ausblick	98
A	Differentielle Modelle	101
B	Erhaltungsgleichungen in Zylinderkoordinaten	107
C	Sekundärströmungen in Kanälen mit nicht kreisförmigem Querschnitt	109
D	Mischungsvorgänge	113
	Literaturverzeichnis	117

Nomenklatur

Lateinische Symbole

a	Beschleunigung, $[\frac{m}{s^2}]$
a_i	Koeffizienten
a_{ij}	Anisotropietensor, $= (\frac{1}{k})\overline{u'_i u'_j} - \frac{2}{3}\delta_{ij}$
A	Matrix des algebraischen Gleichungssystems; Fläche, $[m^2]$
A_{ij}	Allgemeiner Tensor zweiter Ordnung
b	Vektor der rechten Seite des algebraischen Gleichungssystems
c, c_α	Konzentration, $[\frac{kg}{m^3}]$, Teilmassenkonzentration, $[\frac{mol}{m^3}]$
c_f	Lokaler Widerstandsbeiwert
c_p	Spezifische Wärmekapazität bei konstantem Druck, $[\frac{J}{kgK}]$
c_v	Spezifische Wärmekapazität bei konstantem Volumen, $[\frac{J}{kgK}]$
C_i	Modellkoeffizienten
C_{ijk}	Turbulenter Transport der Reynolds-Spannungen, $[\frac{kg}{s^3}]$
$C_{r,i}$	Modellkoeffizienten
$C_{s,i}$	Modellkoeffizienten
C_s	Modellkoeffizient
C_ϵ	Modellkoeffizient
$C_{\epsilon,i}$	Modellkoeffizient
C_μ	Modellkoeffizient
C_μ^*	Invariantenabhängiger Modellkoeffizient
D	Molekularer Diffusionskoeffizient, $[\frac{m^2}{s}]$
\dot{D}	Drehimpulsstrom, $[Nm]$
e	Spezifische innere Energie, $[\frac{m^2}{s^2}]$
f_i	Spezifische Volumenkraft, $[\frac{m}{s^2}]$
F, F_i	Funktionen
h	Spezifische Enthalpie, $[\frac{m^2}{s^2}]$
I	Impulsstromverhältnis
I, II, III	Invarianten von A_{ij}
I_a, II_a, III_a	Invarianten von a_{ij}
$j_j, j_{j,\alpha}, (j_j)_t$..	Massenstrom, Teilmassenstrom, turbulenter Massenstrom, $[\frac{mol}{m^2 s}]$
\dot{I}	Axialimpulsstrom, $[N]$
k	Turbulente kinetische Energie, $[\frac{m^2}{s^2}]$

l_t	Turbulentes Längenmaß, $= (\frac{k^3}{\epsilon})$, [m]
L	Längenmaß, [m]; untere Dreiecksmatrix der Matrix A
Le	Lewis-Zahl, $= (\frac{Sc}{Pr})$
Le_t	Turbulente Lewis-Zahl, $= (\frac{Sc_t}{Pr_t})$
\dot{m}	Massenstrom, $[\frac{kg}{m^3}]$
M_{ijpq}	Tensor vierter Ordnung
n	Normalenrichtung des stromliniengebundenen Koordinatensystems
N	Knotenzahl
NO_x	Stickoxide
p	Druck, $[\frac{N}{m^2}]$
P_{ij}	Produktionsterm der Reynolds'schen Spannungen, $[\frac{kg}{ms^3}]$
P_k	Produktionsterm der turbulenten kinetischen Energie, $[\frac{kg}{ms^3}]$
Pr	Prandtl-Zahl, $= (\frac{\mu c_p}{\lambda})$
Pr_t	Turbulente Prandtl-Zahl
$q_i, (q_i)_t$	Wärmestrom, turbulenter Wärmestrom, $[\frac{W}{m^2}]$
Q_a	Koeffizienten
r	Radius, [m]
R	Gaskonstante, $[\frac{J}{kgK}]$; Radius, [m]; Geschwindigkeitsverhältnis
Re	Reynolds-Zahl, $= (\frac{UL}{\nu})$
Re_t	Turbulente Reynolds-Zahl, $= (\frac{k^2}{\epsilon \nu})$
s	Stromlinienrichtung des stromliniengebundenen Koordinatensystems
S	Mittlere Scherrate, $= \sqrt{2S_{ij} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}}$, $[\frac{1}{s}]$
\tilde{S}	Dimensionslose Invariante von S_{ij} , $= (\frac{k}{\epsilon}) \sqrt{2S_{ij} S_{ij}}$
S_0	Drallzahl, $= (\frac{\dot{D}}{IR})$
S_ϕ	Volumenspezifischer Quellterm der Transportgleichung von ϕ
S_{ij}	Verzerrungsgeschwindigkeitstensor, $= \frac{1}{2} (\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i})$, $[\frac{1}{s}]$
S_{ij}^*	Dimensionsloser Verzerrungsgeschwindigkeitstensor, $= (t_t S_{ij})$
Sc	Schmidt-Zahl, $= (\frac{\mu}{\rho D})$
Sc_t	Turbulente Schmidt-Zahl, $= (\frac{\nu_t}{\nu_{Dt}})$
t	Zeit, [s]
t_t	Turbulentes Zeitmaß, $= (\frac{k}{\epsilon})$, [s]
T	Temperatur, [K]
u_i	Geschwindigkeit, $[\frac{m}{s}]$
$\overline{u'_i u'_j}$	Reynolds Spannungstensor, $[\frac{m^2}{s^2}]$
$\overline{u'_i T'}$	Turbulenter Wärmestromvektor, $[\frac{mK}{s}]$

U	Charakteristische Geschwindigkeit, $[\frac{m}{s}]$; obere Dreiecksmatrix
U_t	Turbulentes Geschwindigkeitsmaß, $=\sqrt{k}$, $[\frac{m}{s}]$
U_φ	Tangentialgeschwindigkeit, $[\frac{m}{s}]$
V	Volumen, $[m^3]$
W_{ij}	Wirbeltensor, $=\frac{1}{2}(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i})$, $[\frac{1}{s}]$
W_{ij}^*	Dimensionsloser absoluter Wirbeltensor, $=t_t(W_{ij} + 1,25\epsilon_{ijk}\Omega_k)$
x	Ortskoordinate im kartesischen Koordinatensystem, $[m]$
x_i	Ortskoordinaten in Einstein'scher Summenkonvention, $[m]$
y	Ortskoordinate im kartesischen Koordinatensystem; Wandabstand, $[m]$
z	Ortskoordinate im kartesischen Koordinatensystem, $[m]$

Griechische Symbole

α	Modellkonstante, Koeffizient der allg. Skalargleichung, $[\frac{kg}{ms}]$
α_i	Modellkonstanten
β_i, β^*	Modellkonstanten
γ_i	Modellkonstanten
Γ_0	Koeffizient der Tangentialgeschwindigkeitsverteilung
Γ_{eff}	Diffusionskoeffizient der Transportgleichung von ϕ
δ_2	Impulsverlustdicke, $[m]$
δ_{ij}	Kronecker-Symbol
ϵ	Dissipationsrate, $[\frac{m^2}{s^3}]$
ϵ_{ij}	Dissipationstensor, $[\frac{m^2}{s^3}]$
ϵ_{ijk}	Permutationssymbol
η_1	Invariante von S_{ij}^* , $=(S_{ij}^* S_{ji}^*)$
η_2	Invariante von W_{ij}^* , $=(W_{ij}^* W_{ji}^*)$
η_3	Differenz der Invarianten η_1 und η_2
η_k	Kolmogoroff-Länge, $=(\frac{k^3}{\epsilon})^{\frac{1}{4}}$, $[m]$
η^2	Dimensionslose Invariante von S_{ij} , $=(\frac{\alpha_2}{\omega^2}) S_{ij} S_{ij}$
λ	Wärmeleitfähigkeit, $[\frac{W}{Km}]$
μ, μ_t	Dynamische Viskosität, turbulente (dynamische) Viskosität, $[\frac{kg}{ms}]$
ν, ν_t	Kinematische Viskosität, turbulente (kinematische) Viskosität, $[\frac{m^2}{s}]$
ν_{Dt}	Turbulente Austauschgröße des Stoffübergangs, $[\frac{m^5}{kgs}]$
ν_{qt}	Turbulente Austauschgröße des Wärmeübergangs, $[\frac{m^5}{Ks^3}]$

ξ^2	Dimensionslose Invariante von W_{ij} , $= (\frac{\alpha_3}{\omega^2}) W_{ij} W_{ij}$
Π_{ij}	Druck-Scher Korrelationstensor, $[\frac{kg}{ms^3}]$
ρ	Dichte, $[\frac{kg}{m^3}]$
σ_α	Quellterm der Teilmasse α , $[\frac{mol}{m^3s}]$
σ_q	Quellterm der spezifischen inneren Energie e , $[\frac{m^3}{s^3}]$
$\sigma_k, \sigma_\epsilon, \sigma_\omega$	Modellkonstanten des k - ϵ und des k - ω Turbulenzmodells
$\sigma_{ki}, \sigma_{\omega i}$	Modellkonstanten der BSL und SST Turbulenzmodelle
τ_{ij}	Reibspannungstensor, $[\frac{kg}{ms^2}]$
τ_w	Wandschubspannung, $[\frac{kg}{ms^2}]$
ϕ, Φ	Allgemeine (Strömungs-) Größe
ω	Spezifische Dissipationsrate, $[\frac{1}{s}]$
Ω_k	Rotationsvektor, $[\frac{1}{s}]$
∇	Nabla Operator

Tiefgestellte Indizes

$(\cdot)_\alpha$	Zähler der Bilanzgleichung der Teilmasse
$(\cdot)_a$	Bezeichnung des nichtlinearen Anteils des Quellterms S
$(\cdot)_c$	Bezeichnung des konstanten Anteils des Quellterms S
$(\cdot)_{eff}$	Bezeichnung für Effektivwert (des Diffusionskoeffizienten)
$(\cdot)_i$	Koordinatenrichtungen von Tensoren 1. Ordnung (Vektoren)
$(\cdot)_{ij}$	Koordinatenrichtungen von Tensoren 2. Ordnung (Dyaden)
$(\cdot)_{ip}$	Bezeichnung für Integrationsstützstelle
$(\cdot)_m$	Bezeichnung für mittleren Wert einer Größe
$(\cdot)_{nb}$	Bezeichnung der Nachbarknotenwerte des Knotenpunktes P
$(\cdot)_{ns,e,w}$	Bezeichnung der Ränder eines Kontrollvolumens in Kompassnotation
$(\cdot)_{N,S,E,W}$...	Bezeichnung benachbarter Größen des Punktes P in Kompassnotation
$(\cdot)_p$	Bezeichnung druckkonstanter Größen
$(\cdot)_P$	Bezeichnung für Größen am diskreten Knotenpunkt P
$(\cdot)_q$	Bezeichnung des Quellterms der Energiegleichung
$(\cdot)_t$	Bezeichnung turbulenter Größen
$(\cdot)_\phi$	Bezeichnung des Quellterms der generischen Transportgleichung
$(\cdot)_\infty$	Bezeichnung für ungestörten Wert

Hochgestellte Indizes

$(\cdot)'$	Kennzeichnung für Schwankungsanteil
$(\cdot)^*$	Kennzeichnung für Koeffizienten des BSL und SST Turbulenzmodells
$(\cdot)^n$	Kennzeichnung des n-ten Iterationsschritts

Abkürzungen

ASM	Algebraic Stress Model
BSL	Baseline Turbulenzmodell
CDS	Central Differencing Scheme
CFD	Computational Fluid Dynamics
DES	Detached Eddy Simulation
DNS	Direkte Numerische Simulation
EASM	Explicit Algebraic Stress Model
EVM	Eddy Viscosity Turbulence Model
ICAO	International Civil Aviation Organization
ILU	Incomplete Lower-Upper Decomposition
LES	Large Eddy Simulation
LRR	Launder, Reece, Rodi Turbulenzmodell
PAC	Physical Advection Correction Diskretisierung
QLM	Quasi-lineares Turbulenzmodell
QUICK	Quadratic Upwind Interpolation for Convective Kinematics
RANS	Reynolds Averaged Navier-Stokes Equations
RSM	Reynolds-Spannungs Turbulenzmodell
SOU	Second Order Upwind Diskretisierung
SUDS	Skew Upwind Discretisation Scheme
SMC	Second Moment Closure Turbulenzmodell
SSG	Speziale, Sarkar, Gatski Turbulenzmodell
SST	Shear Stress Transport Turbulenzmodell
UDS	Upwind Differencing Scheme
URANS	Unsteady Reynolds Averaged Navier-Stokes Equations

1 Einleitung

Der erste Abschnitt der Einleitung ordnet die vorliegende Arbeit in den technologischen Zusammenhang ein. Darauf folgt in Abschnitt 1.2 eine Übersicht der gegenwärtig verfügbaren Möglichkeiten zur numerischen Berechnung turbulenter Strömungen. In Abschnitt 1.3 ist das Ziel der Arbeit dargelegt, Abschnitt 1.4 enthält die Gliederung der Arbeit.

1.1 Hintergrund

Die Entwicklung und Optimierung strömungsmechanischer Bauteile stützte sich bisher vor allem auf den Einsatz analytischer Methoden, auf experimentelle Untersuchungen und auf persönliche Erfahrungen des Ingenieurs. Bedingt durch die immensen Fortschritte der Computertechnologien der letzten Jahrzehnte hat die Methode der numerischen Strömungssimulation (computational fluid dynamics oder kurz CFD) zunehmend an Bedeutung gewonnen. Sie konnte sich bereits in vielen Bereichen der Industrie wie beispielsweise dem Turbomaschinenbau als Entwicklungswerkzeug erfolgreich etablieren. Die Entwicklungszeiten und die damit verbundenen Kosten lassen sich durch den Einsatz der numerischen Strömungssimulation verringern. Konventionelle experimentelle Untersuchungen sind gerade im Bereich der Bauteilauslegung und -optimierung aufgrund der notwendigen Parametervariationen mit einem hohen zeitlichen wie finanziellen Aufwand verbunden. Analytischen Methoden sind für diese Anwendungsfälle oft sehr enge Grenzen gesetzt. Dies trifft insbesondere auch auf die Strömungsvorgänge in Gasturbinenbrennkammern zu, die zu den Hauptkomponenten von stationären Gasturbinen und Strahltriebwerken zählen.

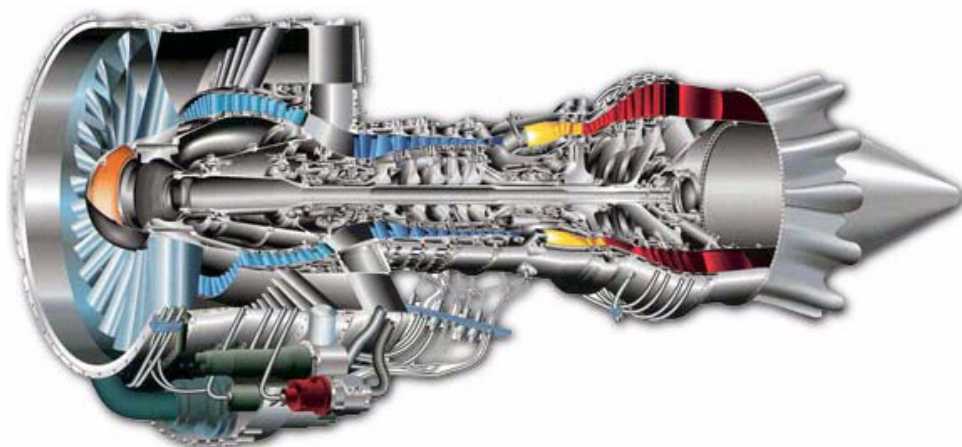


Bild 1.1: Aufbau eines Flugtriebwerks (PW6000)

Bild 1.1 zeigt den Schnitt durch ein Flugtriebwerk (PW6000). Dabei handelt es sich um ein Zweistromtriebwerk, da der Luftmassenstrom hinter dem Fan in zwei Teilströme aufgeteilt wird. Der größere Teil des Luftmassenstroms verlässt das Triebwerk hinter

dem Fan, durch den etwa 80 % des Gesamtschubs generiert wird. Der kleinere Teil des Luftmassenstroms gelangt in das innere Strahltriebwerk. Dessen Arbeitsweise lässt sich thermodynamisch gesehen durch den offenen Joule Prozess beschreiben. Der Massenstrom wird im Strahltriebwerk zunächst durch einen Verdichter adiabat reibungsbehaftet komprimiert. Danach erfolgt in der Brennkammer eine annähernd isobare Wärmezufuhr, bevor es beim Durchströmen der Turbine zu einer adiabat reibungsbehafteten Expansion des Gasstroms kommt. Der Luftmassenstrom verlässt das Triebwerk über eine Düse.

Die Aufgabe der Brennkammer ist die Wärmezufuhr an das Arbeitsmedium durch Umwandlung der im Brennstoff gespeicherten chemischen Energie. Bild 1.2 zeigt den schematischen Aufbau einer konventionellen Gasturbinenbrennkammer [18]. Die vom Verdichter kommende Luft gelangt durch einen Diffusor in die Brennkammer. Hier erfolgt eine Aufteilung des Luftmassenstroms in den Primär- und Sekundärmassenstrom. Der Primärmassenstrom, der etwa 25 % des Gesamtmassenstroms ausmacht, durchströmt den Drallbrenner. Die Beaufschlagung der Luft mit Drall dient einer deutlich verbesserten Brennstoffaufbereitung sowie einer stabilisierenden Wirkung auf die Verbrennung. Durch die Ausbildung einer Rezirkulationszone hinter dem Drallbrenner werden heiße, teilverbrannte Gase und kalte, unverbrannte Sekundärluft zum Brenner zurücktransportiert. Sie sorgen für eine Temperatur oberhalb der Zündtemperatur. Zusammen mit den in der Rezirkulationszone herrschenden niedrigen Strömungsgeschwindigkeiten sind die Voraussetzungen für eine stabile Verbrennung in der Primärzone der Brennkammer gegeben.

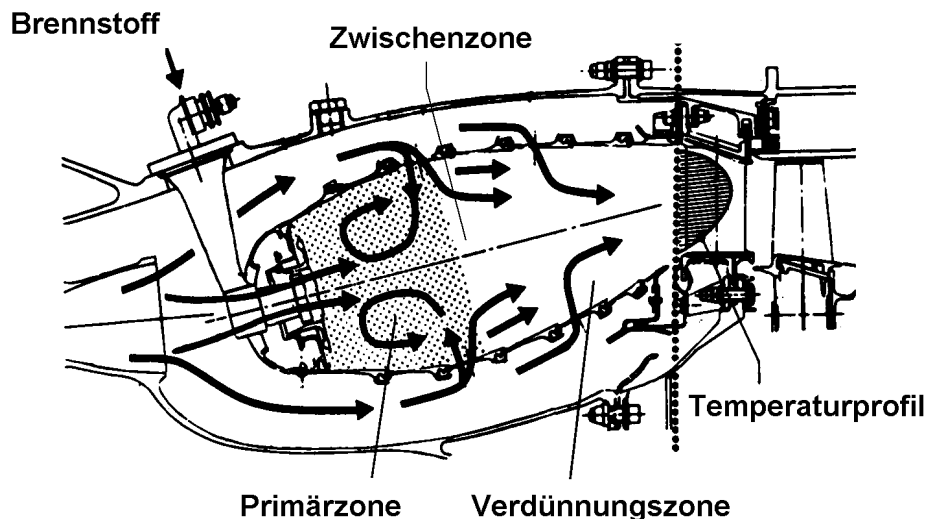


Bild 1.2: Aufbau einer Brennkammer

Die Sekundärluft wird über eine Vielzahl von Bohrungen in der Flammrohrwand eingedüst und schliesst den Primärzonenbereich ab. In den sich anschließenden Zwischen- und Verdünnungszonen wird durch weitere Eindüsung der Sekundärluft das für den nachfolgenden Turbineneintritt benötigte Temperaturprofil und -niveau eingestellt.

Die Auslegung von Gasturbinenbrennkammern mit Hilfe rechnergestützter Methoden besitzt ein enormes Potenzial, wenn man bedenkt, dass der Brennstoffverbrauch der Flugtriebwerke einer der Haupteinflussfaktoren der variablen Kosten für Fluggesellschaften darstellt. Die Senkung des Kraftstoffverbrauchs ist demnach eines der Hauptziele bei der Entwicklung neuer Triebwerke. Vor dem Hintergrund der Absenkung der zulässigen Emissionsgrenzwerte (wie z.B. für NO_x) durch die internationale zivile Luftfahrtorganisation (ICAO) [26] ergeben sich weitere Beweggründe für den Einsatz von CFD zur Brennkammerentwicklung. Da die Mischungsvorgänge zwischen Primär- und Sekundärmassestrom in Gasturbinenbrennkammern die Schadstoffemissionen maßgeblich beeinflussen, sind möglichst detaillierte Kenntnisse der Strömungs- und Mischungsvorgänge Voraussetzung zur Absenkung der Schadstoffemissionen. Die Senkung der NO_x Emissionen steht auch im Hintergrund einer Reihe wissenschaftlicher Forschungsvorhaben am Fachgebiet Gasturbinen und Flugantriebe der TU Darmstadt [7, 11, 28]. Der Schwerpunkt der Untersuchungen ist die strömungsmechanische Optimierung der Mischungsvorgänge zwischen Primär- und Sekundärluft in der Brennkammer. Die in Brennkammern ablaufenden Verbrennungsprozesse bleiben bei diesen Untersuchungen unberücksichtigt, da messtechnische Untersuchungen nur unter hohem technischen Aufwand möglich sind. Die Beschränkung auf den strömungsmechanischen Mischungsvorgang ist insofern zulässig, als die Optimierung der inerten Mischung der Teilströme eine notwendige Bedingung zur Erzielung niedriger NO_x Emissionsraten ist [11]. Die prinzipielle Übertragbarkeit der so gewonnenen Ergebnisse auf Strömungen mit Wärmefreisetzung wurde beispielsweise von Migueis in seiner Arbeit [38] gezeigt.

Der Schlüssel für den erfolgreichen Einsatz der numerischen Strömungssimulation zur Bauteilentwicklung und Optimierung liegt in der Genauigkeit der erzielten Ergebnisse sowie der Robustheit und Schnelligkeit des eingesetzten Verfahrens. Die Bedeutung der letzten beiden Faktoren wird deutlich, wenn man sich vor Augen führt, dass beispielsweise bei der CFD basierten Detailauslegung einer dreidimensional gestalteten Turbinenschaufel unterschiedliche Entwurfsvarianten in einer Größenordnung von $10^2 - 10^3$ untersucht werden [10]. Ähnliches gilt für die Brennkammerentwicklung, die ebenfalls umfangreiche Parametervariationen erfordert.

1.2 Numerische Simulation technisch relevanter turbulenter Strömungen

Turbulente Strömungen sind durch zeitlich und räumlich zufällig schwankende Strömungsgrößen gekennzeichnet. Turbulente Strömungen sind weiterhin immer diffusiv und wirbelbehaftet. Das Spektrum der turbulenten Wirbelstrukturen verbreitert sich mit zunehmender Reynolds-Zahl kontinuierlich. Während die größten Skalen etwa in der Größenordnung des betrachteten Problems sind, werden die kleinsten Skalen mit zunehmender

Reynolds-Zahl immer kleiner. Da technisch relevante turbulente Strömungen generell von hohen Reynolds-Zahlen gekennzeichnet sind, weisen sie ein breites Spektrum turbulenter Wirbelstrukturen auf.

Zur numerischen Simulation turbulenter Strömungen stehen drei unterschiedliche Ansätze zur Verfügung. Die direkte numerische Simulation (DNS), die Grobstruktursimulation (LES) sowie die Methode der statistischen Beschreibungsweise (RANS). Die Ansätze unterscheiden sich durch den verwendeten Grad der Modellierung der Turbulenz beziehungsweise durch den Umfang des berechneten turbulenten Wirbelspektrums. Bei der in Kapitel 2.3.1 ausführlicher beschriebenen DNS Methode wird das vollständige Spektrum der turbulenten Wirbelstrukturen (die Zeit- und Längenmaße der turbulenten Schwankungen) berücksichtigt. Es findet demzufolge keine Modellierung der Turbulenz statt. Bei der LES Methode wird ein Teil der turbulenten Strukturen modelliert. Bei der RANS Methode wird das Spektrum der turbulenten Strukturen vollständig modelliert.

Technisch relevante turbulente Strömungen können auf absehbare Zeit nicht mit Hilfe der direkten numerischen Simulation (DNS) durch Lösen der Bilanzgleichungen für Masse, Impuls und gegebenenfalls Energie berechnet werden (vgl. [14, 47]), da der Bedarf an Gitterpunkten zur vollständigen Auflösung der turbulenten Wirbelstrukturen mit wachsenden Reynolds-Zahlen überproportional ansteigt. Deshalb muss in numerischen Simulationsverfahren die Turbulenz durch Modellierung beschrieben werden. Von den zwei gegenwärtig verfügbaren Ansätzen zur Modellierung turbulenter Strömungen, der Grobstruktursimulation (LES) und der statistischen Beschreibung ist der letztgenannte Ansatz für diesen Einsatzzweck derzeit besser geeignet und wird überwiegend im industriellen Einsatz genutzt. Dies hängt primär mit den begrenzten Computerressourcen zusammen. Da die in Kapitel 2.3.2 näher beschriebene LES Methode einen Teil des turbulenten Spektrums direkt berechnet, ist sie von der Problematik des sich verbreiternden turbulenten Wirbelspektrums ebenfalls direkt betroffen. Der Anteil des modellierten Wirbelspektrums nimmt mit wachsender Reynolds-Zahl (bei gegebener Knotenzahl) automatisch zu. Aus Genauigkeitsgründen sollte ein gewisser Grenzwert nicht überschritten werden. Mit den stetig steigenden Computerleistungen gewinnt die Grobstruktursimulation weiter an Bedeutung. Sie wird aber ähnlich wie die direkte numerische Simulation (DNS) im Rahmen des Entwurfsprozesses strömungstechnischer Bauteile auch mittelfristig nur eine begrenzte Rolle spielen.

In der statistischen Beschreibungsweise turbulenter Strömungen, die in Kapitel 2.3.3 näher erläutert ist, werden nicht die zeitlich und räumlich zufällig schwankenden Strömungsgrößen betrachtet, sondern lediglich deren Mittelwerte. Durch die punktweise statistische Mittelung der Transportgleichungen entstehen in den gemittelten Impulserhaltungsgleichungen, den so genannten *Reynolds Averaged Navier-Stokes Equations* (RANS), zusätzliche unbekannte Terme. Sie beschreiben die Wirkung der Turbulenz auf die mittlere

Strömung. Bei den unbekannten Termen handelt es sich um Korrelationen lokaler Geschwindigkeitsfluktuationen. Diese statistischen Momente zweiter Ordnung werden oft als *Reynolds-Spannungen* bezeichnet. Zur Bestimmung der Reynolds-Spannungen können Transportgleichungen dieser statistischen Momente zweiter Ordnung entwickelt werden. Die Transportgleichungen enthalten aber ihrerseits neue und unbekannte Terme (unter anderem in Gestalt statistischer Momente dritter Ordnung). Die Strategie der Entwicklung neuer Transportgleichungen für die unbekannten Terme führt prinzipiell nicht zum Ziel eines geschlossen lösbaren Gleichungssystems, da jede neue Transportgleichung immer neue unbekannte Terme enthält (Schließungsproblem). Zur Lösung des Gleichungssystems ist man daher auf den Einsatz von Turbulenzmodellen angewiesen. Turbulenzmodelle haben die Aufgabe, die in den gemittelten Impulserhaltungsgleichungen auftretenden unbekannten Reynolds-Spannungen bestimmbar zu machen. Der Entwicklung von Turbulenzmodellen liegen zwei unterschiedliche Ansätze zugrunde, die auf zwei unterschiedliche Klassen von Turbulenzmodellen führen: Algebraische und differenzielle Turbulenzmodelle. Algebraische Ansätze modellieren die Reynolds-Spannungen direkt, während differenzielle Ansätze die Transportgleichung der Reynolds-Spannungen modellieren.

Innerhalb der Klasse der algebraischen Turbulenzmodelle existiert eine Vielzahl unterschiedlichster Modelle. Allen ist die Grundannahme gemeinsam, dass die Turbulenz parametrisierbar ist. Die Reynolds-Spannungen werden in Abhängigkeit des Gradienten der mittleren Strömungsgeschwindigkeiten sowie eines charakteristischen turbulenten Zeit- und Längenmaßes ausgedrückt. Algebraische Turbulenzmodelle unterscheiden sich zunächst in der Art der angenommenen Abhängigkeit vom Gradienten der mittleren Strömungsgeschwindigkeit. Tritt in der postulierten Funktion der Geschwindigkeitsgradient in einfacher Form auf, handelt es sich um lineare Turbulenzmodelle. Bestehen Abhängigkeiten vom Geschwindigkeitsgradienten in Potenzen höherer Ordnung, entstehen nichtlineare Turbulenzmodelle. Weiterhin unterscheiden sie sich darin, welche turbulenten Größen als Maß für das charakteristische turbulente Zeit- und Längenmaß herangezogen und vor allem, wie diese unbekannten Parameter bestimmt werden. Bei praktisch allen algebraischen Turbulenzmodellen werden die beiden Parameter noch zu einem neuen Parameter zusammengefasst, der so genannten *Wirbelviskosität*. Wirbelviskositätsmodell (EVM von *eddy viscosity model*) ist der allgemein gebräuchliche Ausdruck für ein algebraisches Turbulenzmodell. Werden zur Bestimmung der beiden turbulenten Parameter Bilanzgleichungen gelöst, spricht man von einem 2-Gleichungsmodell. Schließlich unterscheiden sich Wirbelviskositätsmodelle noch darin, welche turbulenten Größen als charakteristische Parameter genutzt werden.

Bei den bis heute im industriellen Umfeld am weitesten verbreiteten Turbulenzmodellen handelt es sich um lineare 2-Gleichungs Wirbelviskositätsmodelle. Der prominenteste Vertreter dieser Gattung ist das so genannte k - ϵ Turbulenzmodell. Der Grund für die Popularität dieser Modelle ist die beinahe optimale Kombination der Parameter Genau-

igkeit, Robustheit und Schnelligkeit. Die Modelle sind numerisch sehr robust und schnell, stoßen aber bei komplexen Strömungen bezüglich ihrer Vorhersagegenauigkeit auf Grenzen. Dort machen sich die vereinfachenden Annahmen bei der Herleitung der linearen EVM bemerkbar. Als Beispiele dienen turbulente Strömungen mit Systemrotation, starker Stromlinienkrümmung oder Spannungsanisotropie. Zur Verbesserung der Vorhersagegüte ist man auf den Einsatz nichtlinearer Wirbelviskositätsmodelle oder aber auf differenzielle Turbulenzmodelle angewiesen.

Differenzielle Turbulenzmodelle, oft auch als Reynolds-Spannungs Modelle (RSM) oder Schließungsmodelle zweiter Ordnung (SMC) bezeichnet, sind vom physikalischen Ansatz her fundierter und können einige konzeptionelle Schwächen der linearen Wirbelviskositätsmodelle beseitigen. Trotz ihres Potenzials konnten sich die SMC im industriellen Einsatz (noch) nicht etablieren. Dies ist insofern bemerkenswert, als das erste differenzielle Modell praktisch zur gleichen Zeit vorgestellt wurde wie das k - ϵ Turbulenzmodell. Die Gründe hierfür liegen zum einen im höheren Rechenzeitbedarf, aber vor allem in der reduzierten Robustheit der Modelle. Die numerische Stabilität des Verfahrens verringert sich, da ein Satz quelltermdominierter, stark nichtlinearer, eng gekoppelter und damit numerisch steifer Differentialgleichungen gelöst werden muss [31, 45]. Zudem hat sich in der Praxis gezeigt, dass selbst (lineare) SMC nicht alle Defizite der EVM beseitigen können. Eine kontinuierliche Weiterentwicklung der Modelle und besonders durchgreifende Verbesserungen auf dem Gebiet der numerischen Behandlung sind notwendig, um den SMC Modellen zum Durchbruch hinsichtlich des industriellen Einsatzes zu verhelfen.

Auf diesen Erkenntnissen aufbauend wurden zunehmend nichtlineare Wirbelviskositätsmodelle entwickelt und vorgestellt (Beispielhaft seien genannt die Modelle der Autoren Apsley und Leschziner [5], Craft, Launder, Suga [9], Shih, Zhu, Lumley [48], Gatski und Speziale [17], Wallin und Johansson [56]). Ziel dieser Modellklasse ist die Kombination der numerischen Effizienz (Robustheit bei gleichzeitig niedrigem Rechenzeitbedarf) der linearen Wirbelviskositätsmodelle mit einer verbesserten Vorhersagegüte der differenziellen Modelle. Eine andere Vorgehensweise mit demselben Ziel basiert auf Vereinfachungen der Transportgleichungen der Reynolds-Spannungen. Damit gelingt die Entwicklung algebraischer Beziehungen für die Reynolds-Spannungen. Diese als explizite algebraische Reynolds-Spannungs Modelle (EASM) bezeichneten Beziehungen lassen sich formal mit Hilfe der Invariantenmodellierung [48] in nichtlineare Wirbelviskositätsmodelle überführen. Die unterschiedlichen Bezeichnungen deuten auf den ursprünglichen Ansatz hin.

Da das turbulente Strömungsfeld in Gasturbinenbrennkammern nicht zuletzt durch die starke Verdrallung des Primärmassestroms sowie der Sekundärlufteinblasung als äußerst komplex zu bezeichnen ist, spricht vieles für die Verwendung von Turbulenzmodellen aus dem Bereich der nichtlinearen Wirbelviskositätsmodelle (oder respektive EASM).

1.3 Zielsetzung

Ziel der Arbeit ist es, die im vorigen Abschnitt getroffene Schlussfolgerung bezüglich des Einsatzes nichtlinearer Wirbelviskositätsmodelle zur Berechnung der Strömungs- und Mischungsvorgänge in Gasturbinenbrennkammern unter Berücksichtigung der besonderen Anforderungen für die Anwendung im routinemäßigen Betrieb zu überprüfen. Denn zum einen haben wissenschaftliche Arbeiten zu diesem Thema wie die von Bauer [6] gezeigt, dass die Verwendung nichtlinearer EVM und EASM mit Einschränkungen der numerischen Stabilität einhergehen können. Zum anderen ist zwar die theoretische Überlegenheit höherwertiger Turbulenzmodelle anhand sorgfältig konzipierter und idealisierter Strömungssituationen zweifelsfrei belegbar. Bei komplexen technischen Realisierungen ergeben sich zwangsläufig Überlagerungen verschiedener idealisierter Strömungssituationen, die das Ausschöpfen des konzeptionellen Potenzials der höherwertigen Turbulenzmodelle behindern könnten.

1.4 Gliederung

Nach der Einleitung befasst sich Kapitel 2 mit den theoretischen Grundlagen der Behandlung turbulenter Strömungen. Nach der Vorstellung der mathematischen Grundgleichungen werden die grundsätzlichen Methoden ihrer Berechnung vorgestellt. Insbesondere wird die für diese Arbeit verwendete Methode der statistischen Beschreibungsweise sowie die verwendeten Turbulenzmodelle erläutert. In Kapitel 3 wird gesondert auf die Besonderheiten turbulenter Strömungen mit Drall eingegangen. Zum einen, weil Drall ein prägender Bestandteil der Brennkammerströmung ist, und zum anderen, weil turbulente Drallströmungen aufgrund ihrer Besonderheiten die Entwicklung und den Einsatz ausgereifter Turbulenzmodelle rechtfertigen, da nicht alle Turbulenzmodelle drallbehaftete turbulente Strömungen beschreiben können. Das verwendete numerische Verfahren wird in Kapitel 4 vorgestellt. Mit diesem Verfahren werden unter Verwendung einer Auswahl der in Kapitel 2.4 und A vorgestellten algebraischen und differenziellen Turbulenzmodelle verschiedene turbulente Strömungen berechnet und mit gut vermessenen Laborströmungen verglichen. Die Auswahl der Laborströmungen erfolgte unter dem Gesichtspunkt der Validierung der neu implementierten Turbulenzmodelle, aber insbesondere im Hinblick auf die Berechnung der brennkammertypischen turbulenten Strömung. Alle Strömungen sowie die mit den Turbulenzmodellen erzielten Ergebnisse sind in Kapitel 5 zusammengefasst. Abschließend erfolgt eine Zusammenfassung der Arbeit und ein Ausblick auf mögliche zukünftige weiterführende Ansatzpunkte.

2 Theoretische Grundlagen

Die theoretische Grundlage zur Beschreibung von Strömungen sind die Bilanz- oder Transportgleichungen der Kontinuumsmechanik für Masse, Impuls und Energie. Zur Beschreibung von Mischungsvorgängen sind weitere Stofftransportgleichungen notwendig. In reagierenden Brennkammerströmungen sind alle Transportgleichungen zu berücksichtigen. Im Rahmen dieser Arbeit werden lediglich inerte Strömungen betrachtet. Auf eine Herleitung und ausführliche Erläuterung der Gleichungen wird verzichtet, da es zu diesem Zweck bereits bewährte Literaturstellen wie etwa Spurk [53] gibt. Die mathematischen Grundgleichungen werden nachfolgend in der für numerische Strömungssimulationen gebräuchlichen Form zusammengefasst. Anschließend werden in Abschnitt 2.2 die verwendeten Materialgesetze und Vereinfachungen wiedergegeben. Die Möglichkeiten zur Behandlung turbulenter Strömungen im Rahmen der numerischen Strömungsmechanik werden in Kapitel 2.3 gezeigt. Abschnitt 2.4 gibt eine Übersicht verschiedener algebraischer Turbulenzmodelle. Abschnitt A fasst differentielle Modelle zusammen.

2.1 Transportgleichungen

Die physikalischen Prinzipien der Massen-, Impuls- und Energieerhaltung beschreiben die Bewegung von Fluiden ohne Stoffübergang vollständig. In Strömungen mit Stoffaustausch gilt zusätzlich das Prinzip der Stoff- oder Teilmassenerhaltung, das in Abschnitt 2.2.4 gesondert behandelt wird. Die Energiegleichung spielt bei den hier betrachteten Strömungen ohne Wärmefreisetzung keine Rolle. Eine Behandlung der Energiegleichung erfolgt dennoch, weil sie sich unter den Bedingungen, die in Abschnitt 2.2.4 näher beschrieben sind, zur Berechnung von Mischungsvorgängen eignet. Die Anwendung der Bilanzsätze auf ein infinitesimales raumfestes Kontrollvolumen in einem kartesischen Koordinatensystem führt unter Verwendung der Einstein'schen Summenkonvention auf die Bilanzgleichungen in der Euler'schen Form für Masse (2.1), Impuls (2.2) und Energie (2.3)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial x_i} = 0 \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_j u_i)}{\partial x_j} = \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \rho f_i \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial(\rho e)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_j e)}{\partial x_j} = \tau_{ji} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial q_j}{\partial x_j} + \rho \sigma_q \quad (2.3)$$

Das durch (2.1)-(2.3) gegebene Gleichungssystem ist von wenigen Ausnahmen abgesehen, bei denen vereinfachende Annahmen zulässig sind, in technisch relevanten Fällen nicht lösbar. Das liegt an nicht bekannten Termen in den Bilanzgleichungen für Impuls (2.2)

(τ_{ij}) und Energie (2.3) (q_i) . Die zur Lösung notwendigen zusätzlichen Gleichungen werden zusammen mit einigen weiteren Vereinfachungen im folgenden Abschnitt beschrieben.

2.2 Konstitutive Gleichungen und Vereinfachungen

Die in den Bilanzgleichungen (2.1)-(2.3) auftretenden unbekannten physikalischen Größen sind vom betrachteten Fluid abhängig. Die dafür aufgestellten konstitutiven Gleichungen werden deshalb auch Materialgleichungen genannt. Sie werden nachfolgend für jeden der betrachteten Bilanzsätze vorgestellt. Zudem lassen die im Rahmen dieser Arbeit durchgeführten Untersuchungen einige vereinfachende Annahmen zu, die für alle Bilanzsätze Anwendung finden. Die Erhaltungssätze sollen für inkompressible Gase gelten. Die Annahme der Inkompressibilität ist zulässig, wenn das Quadrat der Mach-Zahl Ma , die als das Verhältnis der Strömungsgeschwindigkeit zur Schallgeschwindigkeit definiert ist, deutlich kleiner als 1 ist [53]: $Ma^2 \ll 1$. Als konkrete Grenze lässt sich auch die Bedingung $Ma < 0,3$ finden [14].

In Brennkammern treten am Ort der Sekundärlufteinblasung gewöhnlich die größten lokalen Geschwindigkeiten auf. In dem hier untersuchten Fall war die maximale Strahleintrittsgeschwindigkeit nie größer als $U_{max} \leq 50m/s$. Da die lokale Schallgeschwindigkeit unter den gegebenen Randbedingungen bei $a \approx 340m/s$ liegt, ergibt sich eine maximale lokale Machzahl von $Ma \approx 0,147$. Weiterhin wird das hier vorliegende Fluid Luft als ideales Gas betrachtet. Die entsprechenden Materialgleichungen sind die thermische (2.4) und kalorische Zustandsgleichung für die innere Energie (2.5) beziehungsweise für die Enthalpie (2.6).

$$p = \rho RT \quad (2.4)$$

$$e = c_v T \quad (2.5)$$

$$h = c_p T \quad (2.6)$$

Die Annahme eines idealen Gases ist für hinreichend niedrige Drücke und Temperaturen ($T \leq 500K$) gerechtfertigt. Diese Randbedingungen sind für alle nachfolgend betrachteten Fälle erfüllt.

2.2.1 Massenerhaltung

Durch die Beschränkung auf inkompressible Strömungen kann die Massenbilanz (2.1) auf die Form (2.7) reduziert werden.

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (2.7)$$

2.2.2 Impulserhaltung

Der in der Impulserhaltungsgleichung (2.2) auftretende Reibspannungstensor τ_{ij} ist materialabhängig. Für so genannte einfache Flüssigkeiten, zu denen auch das hier betrachtete Fluid Luft zählt, wird ein linearer Zusammenhang zwischen Spannungs- und Dehnungsgeschwindigkeitstensor formuliert. Wird noch die Gültigkeit der Stokes'schen Hypothese¹ angenommen, ergibt sich das Materialgesetz für Newton'sche Fluide (2.8). Die Impulserhaltungsgleichungen für Newton'sche Fluide werden auch als Navier-Stokes Gleichungen bezeichnet. Werden nur inkompressible Flüssigkeiten betrachtet, ergibt sich aus der allgemeinen Impulsbilanz (2.2) mit Hilfe der Materialgleichung für Newton'sche Fluide (2.8) Gleichung (2.9)

$$\tau_{ij} = \mu \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right] - p \delta_{ij} \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_j u_i)}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) + \rho f_i \quad (2.9)$$

2.2.3 Energieerhaltung

In reagierenden Brennkammerströmungen mit Wärmefreisetzung ist die Energieerhaltungsgleichung (2.3) zu berücksichtigen. Für inerte Strömungen, die im Rahmen dieser Arbeit betrachtet werden, ist sie vernachlässigbar. Die Beschränkung auf inerte Strömungen für Mischungsuntersuchungen in Brennkammern ist weit verbreitet (vgl. Kapitel 1.1), da strömungsmechanische Mischungseffekte isoliert von thermodynamischen und reaktionskinetischen Effekten untersucht werden können. Die Konzentration auf die strömungsmechanische Mischung vereinfacht sowohl experimentelle als auch numerische Untersuchungen. In nicht reagierenden Strömungen wird die Energieerhaltungsgleichung statt zur Berechnung von Temperaturverteilungen zur Berechnung (bzw. Messung) von Mischungsverteilungen herangezogen. Das Prinzip der Ersetzung der Stofferhaltungsgleichung durch die Energieerhaltungsgleichung ist nachfolgend in Abschnitt 2.2.4 beschrieben. Zuvor werden noch einige Annahmen zur Vereinfachung der Energieerhaltungsgleichung (2.3) erläutert.

Der Wärmestromvektor q_i in (2.3) beschreibt die Wärmezufuhr an das Fluid und ist ebenfalls materialabhängig. Von den möglichen Wärmetransportmechanismen wird die

¹Danach wird auch bei mehratomigen Gasen die Druckzähigkeit vernachlässigt: $\mu_D = \lambda^* + 2/3\mu = 0$

Wärmeleitung berücksichtigt. Wärmeaustausch durch Strahlung wird ebenso vernachlässigt wie Wärmetransport durch Diffusionseffekte. Mit dem Fourier'schen Wärmeleitungsgesetz (2.10), der Materialgleichung für Newton'sche Flüssigkeiten (2.8), der kalorischen Zustandsgleichung für ideale Gase (2.5) sowie der Beschränkung auf inkompressible Fluide ergibt sich die Energieerhaltungsgleichung (2.11)

$$q_i = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x_i} \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial(\rho e)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_j e)}{\partial x_j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \left[\mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) + \rho \sigma_q \quad (2.11)$$

2.2.4 Wärme-Stoff Analogie

Da im Rahmen dieser Arbeit Berechnungsergebnisse mit Ergebnissen experimenteller Untersuchungen verglichen werden, die unter der Annahme der Gültigkeit der Wärme- Stoff Analogie erzielt wurden und dementsprechend die numerischen Untersuchungen gleichfalls auf dieser Annahme beruhen, wird die Wärme-Stoff Analogie näher erläutert. Für experimentelle Mischungsuntersuchungen hat sich die Anwendung der Wärme-Stoff Analogie als sehr nützlich erwiesen, da die experimentelle Bestimmung von Temperaturfeldern wesentlich einfacher gelingt als die Messung von Konzentrationsfeldern.

Unter der Voraussetzung konstanter Stoffwerte ist die Energieerhaltungsgleichung genauso wie die Stofferhaltungsgleichung von der Massen- und Impulserhaltungsgleichung entkoppelt. Die Strömungsfelder isothermer Stoffübergangs- und einphasiger Wärmeübergangssysteme sind identisch, wenn geometrische Ähnlichkeit sowie gleiche Anfangs- und Randbedingungen gegeben sind. Die Wärme-Stoff Analogie besagt, dass nicht nur die Strömungsfelder, sondern auch die Temperatur- und Konzentrationsfelder selbst identisch sind, wenn weitere vereinfachende Annahmen erfüllt sind. Unter Vernachlässigung der Druck²- und Reibungskräfte sowie der Verwendung der kalorischen Zustandsgleichung (2.5) kann die Energieerhaltungsgleichung zu einer Temperaturerhaltungsgleichung umgeformt werden.

$$\frac{\partial(\rho c_p T)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_j c_p T)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) + \rho \sigma_q \quad (2.12)$$

Die Bilanzgleichung der Teilmasse lautet allgemein

²wird die Energieerhaltung mit der Definition der Enthalpie $h = e + \frac{p}{\rho}$ ausgedrückt, tritt in der Bilanzgleichung wegen der Beziehung $\rho \frac{Dh}{Dt} = \rho \frac{De}{Dt} - \frac{p}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} + \frac{Dp}{Dt}$ der erwähnte Term in der Gleichung auf

$$\frac{\partial(\rho c_\alpha)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_j c_\alpha)}{\partial x_j} = -\frac{\partial j_{j,\alpha}}{\partial x_j} + \sigma_\alpha \quad (2.13)$$

Wird ein Zweistoffsystem ($\alpha=2$, $c=c_1=(1-c_2)$) betrachtet und der in Gleichung (2.13) auftretende unbekannte Diffusionsmassenstrom j_j unter Vernachlässigung weiterer Effekte wie Diffusion durch Druckunterschiede (Dufour-Effekt) oder Temperaturvariationen (Soret-Effekt) mit Hilfe des Fick'schen Diffusionsgesetzes (2.14) approximiert, ergibt sich die vereinfachte Stofferhaltungsgleichung (2.15)

$$j_j = j_{j,1} = -j_{j,2} = -\rho D \frac{\partial c}{\partial x_j} \quad (2.14)$$

$$\frac{\partial(\rho c)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_j c)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\rho D \frac{\partial c}{\partial x_j} \right) + \sigma_\alpha \quad (2.15)$$

Ein Vergleich der Temperatur- (2.12) mit der Stofferhaltungsgleichung (2.15) verdeutlicht deren strukturelle Ähnlichkeit. Werden schließlich noch die Quellterme in beiden Gleichungen vernachlässigt, also lediglich nicht reagierende Strömungen ($\sigma_\alpha = 0$) und Strömungen ohne Wärmequellen ($\sigma_q = 0$) betrachtet, beschreibt die allgemeine skalare Transportgleichung (2.16) beide Prozesse gleichermaßen, wenn die sich aus dem Termvergleich ergebende Analogiebedingung (2.17) erfüllt ist.

$$\frac{\partial(\rho \phi)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_j \phi)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\alpha \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \right) \quad (2.16)$$

$$\alpha = \frac{\lambda}{c_p} = \rho D \quad (2.17)$$

Mit den charakteristischen Kennzahlen $Pr = \frac{\mu c_p}{\lambda}$ für den Wärmetransport, $Sc = \frac{\mu}{\rho D}$ für den Stofftransport und $Le = \frac{Sc}{Pr}$ lässt sich die Analogiebedingung (2.17) dimensionslos darstellen.

$$Le = \frac{Sc}{Pr} = 1 \quad (2.18)$$

Bedingung (2.18) fordert eine Übereinstimmung der molekularen Austauschvorgänge, die im allgemeinen zwar nicht erfüllt ist, aber für Gase oft recht gut zutrifft³. In turbulenten Strömungen dominieren aber turbulente gegenüber molekularen Austauschvorgängen,

³Bsp: $Pr=0,71$ für Luft, $Sc=0,61$ für das Gemisch Ammoniak-Luft unter Normalbedingungen

die nur in der Nähe fester Wände von Bedeutung sind. Da sich die hier betrachteten Mischungsvorgänge von Sekundärluft mit dem Primärmassenstrom in Gasturbinenbrennkammern fernab wandnaher Bereiche vollzieht, ist die damit verbundene Analogiebedingung (2.18) für diesen Anwendungsfall nur von untergeordneter Bedeutung. Wichtiger für die Gültigkeit der Wärme-Stoff Analogie in turbulenten Strömungen ist die Übereinstimmung der turbulenten Austauschvorgänge von Stoff und Wärme. Die Analogiebedingung für die Ähnlichkeit der turbulenten Austauschvorgänge wird nachfolgend angegeben.

Weder die Energie- (2.12) noch die Stoffhaltungsgleichung (2.15) enthalten einen Term, der die Wirkung der turbulenten Austauschvorgänge explizit beschreibt. Greift man auf Beziehungen zurück, die lediglich die Wirkung der Turbulenz auf gemittelte Größen beschreiben, sind dort den turbulenzbedingten Transport beschreibenden Terme enthalten. Sie werden an dieser Stelle vorgestellt und in Abschnitt 2.3.3 zusammen mit dem zugrunde liegenden Ansatz ausführlicher beschrieben. Der turbulente Wärmestromvektor $(q_i)_t$ wie der turbulente Stoffstromvektor $(j_i)_t$ werden in Anlehnung an das Fourier'sche Wärmeleitungsgesetz (2.10) bzw. das Fick'sche Diffusionsgesetz (2.14) modelliert, wie Gleichungen (2.19) und (2.20) verdeutlichen.

$$(q_i)_t = -\rho c_p \nu_{qt} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j} \quad (2.19)$$

$$(j_i)_t = -\rho \nu_{Dt} \frac{\partial \bar{c}}{\partial x_j} \quad (2.20)$$

Die beiden Gesetze (2.19) und (2.20) bilden die Grundlage der Analogiebetrachtungen in turbulenten Strömungen. Mit der Einführung von dimensionslosen Kenngrößen für den turbulenten Wärme- und Stoffstrom, der turbulenten Prandtl-Zahl $Pr_t = \frac{\nu_t}{\nu_{qt}}$ und der turbulenten Schmidt-Zahl $Sc_t = \frac{\nu_t}{\nu_{Dt}}$ sowie der turbulenten Lewis-Zahl $Le_t = \frac{Sc_t}{Pr_t}$ kann eine dimensionslose Analogiebedingung, die für turbulente Strömungen zusätzlich zur Analogiebedingung (2.17) erfüllt sein muss, angegeben werden.

$$Le_t = \frac{Sc_t}{Pr_t} = 1 \quad (2.21)$$

Von der Gültigkeit der Gleichung (2.21) und damit der Gültigkeit der Wärme-Stoff Analogie wird basierend auf experimentellen Ergebnissen und wegen der Ähnlichkeit der Transportgleichungen für $(q_i)_t$ und $(j_i)_t$ in allen technisch relevanten Anwendungsfällen ausgegangen [27].

2.3 Behandlung turbulenter Strömungen

Die in Abschnitt 2.1 vorgestellten Bilanzsätze beschreiben die Dynamik laminarer und auch turbulenter Strömungen. Abgesehen von einigen Spezialfällen wie der turbulenten Grenzschicht oder der Rohrströmung kann auch mit den in Abschnitt 2.2 eingeführten Navier-Stokes Gleichungen inkompressibler Fluide das turbulente Strömungs- und Mischungsfeld nicht direkt berechnet werden. Die wichtigste Kenngröße im Zusammenhang mit der Berechnung der Navier-Stokes Gleichungen ist die Reynolds-Zahl (2.22). Sowohl die dimensionslosen Navier-Stokes Gleichungen als auch die dimensionslose Kontinuitätsgleichung hängen von ihr ab [53]. Laminare Strömungen treten nur unterhalb einer bestimmten problemabhängigen kritischen Reynolds-Zahl auf. Oberhalb dieser Zahl wird die Strömung turbulent. Die Reynolds-Zahl Re ist als das Verhältnis des Produkts einer typischen Geschwindigkeit mit einer typischen geometrischen Abmessung des Problemgebiets zur Viskosität definiert (2.22). Sie ist auch als Verhältnis der typischen Trägheitskraft zur Zähigkeitskraft interpretierbar.

$$Re = \frac{UL}{\nu} \quad (2.22)$$

Zur Erzielung von Berechnungsergebnissen für turbulente Strömungen sind Modellierungen notwendig. Die gebräuchlichsten Ansätze werden nachfolgend vorgestellt. Besondere Aufmerksamkeit gilt der in Abschnitt 2.3.3 vorgestellten statistischen Beschreibung, da sie Grundlage dieser Arbeit ist.

2.3.1 Direkte numerische Simulation

Die Verwendung der Navier-Stokes Gleichungen scheint die naheliegendste und auch die einfachste Methode der Berechnung turbulenter Strömungen zu sein. Diese Methode wird allgemein als direkte numerische Simulation (kurz: DNS) bezeichnet. Die charakteristischen Eigenschaften turbulenter Strömungen führen jedoch sehr rasch an die Grenzen dieses Ansatzes. Turbulente Strömungen sind immer dreidimensional, instationär, wirbelbehaftet und gekennzeichnet von zufällig schwankenden Strömungsgrößen. Zur vollständigen numerischen Auflösung muss die zeitliche Auflösung kleiner als die kürzesten turbulenten Schwankungsbewegungen und die räumliche Auflösung kleiner als die kleinsten in der Strömung anzutreffenden Wirbel sein. Die Größe der kleinsten turbulenten Wirbel kann mit dem Kolmogoroff Längenmaß η_k abgeschätzt werden. Die größten turbulenten Längenskalen L sind etwa in der Größenordnung einer typischen geometrischen Länge des Problemgebiets, also beispielsweise der Durchmesser eines Drallbrenners. Für das Verhältnis der Längenskalen gilt [55]

$$\frac{L}{\eta_k} = Re_t^{\frac{3}{4}} \quad \Rightarrow \quad N \sim \left(\frac{L}{\eta_k} \right)^3 = Re_t^{\frac{9}{4}} \quad (2.23)$$

Nach Gleichung (2.23) wird mit steigender (turbulenter) Reynolds-Zahl das aufzulösende Längenspektrum immer größer, da die kleinsten Wirbel immer kleiner werden. Die erforderliche Knotenzahl N des Rechengitters steigt wegen des dreidimensionalen Charakters turbulenter Strömungen überproportional an. Die maximale Anzahl der Knoten wird durch die Leistungsfähigkeit des Rechners begrenzt, der damit die Grenze der Anwendbarkeit für DNS Rechnungen vorgibt. Trotz des enormen Fortschritts der Computerkapazitäten liegt die derzeitige Grenze der direkt berechenbaren turbulenten Strömungen etwa bei $Re_t \approx 100$ [47]. Mit den zum gegenwärtigen Zeitpunkt leistungsfähigsten Supercomputern würde die direkte Berechnung einer turbulenten Kanalströmung mit einer Reynolds-Zahl⁴ $Re = 10^6$ beispielsweise etwa 1600 Jahre benötigen [47].

Die direkte numerische Simulation turbulenter Strömungen ist sehr nützlich für ein besseres Verständnis der Physik turbulenter Strömungen. Ergebnisse von DNS Rechnungen dienen oft als Grundlage zur Entwicklung, Kalibrierung und Validierung von Turbulenzmodellen der Grobstruktursimulation und der statistischen Beschreibungsweise. Der Einsatz dieser Methode für die Berechnung technisch interessierender Strömungen ist jedoch auf längere Sicht nicht möglich und wohl auch nicht nötig, da zur Bauteilauslegung und Optimierung Informationen über globale und mittlere Parameter vielfach ausreichen.

2.3.2 Grobstruktursimulation

Bei der Grobstruktursimulation wird im Gegensatz zur direkten numerischen Simulation nicht das komplette Spektrum der turbulenten Längen- und Zeitmaße berücksichtigt, um den enormen Aufwand von DNS Rechnungen zu umgehen. Die Grobstruktursimulation lässt sich mit der Vorstellung der Energiekaskade veranschaulichen [55]. Danach erfolgt in turbulenten Strömungen die Einspeisung von Turbulenzenergie durch große Turbulenzelemente mit der charakteristischen Länge L . Die größten Skalen geben ihre Energie durch Übertragung an turbulente Wirbel mit kleinerer charakteristischer Länge weiter. Dieser kaskadenartige Prozess vollzieht sich bis hin zu den kleinsten Wirbeln der Kolmogoroff-Länge η_k . Hier wird die zugeführte kinetische Energie schließlich dissipiert. Die großen, energiereichen turbulenten Skalen sind von der Größenordnung der betrachteten Geometrie und daher im allgemeinen problemabhängig, inhomogen und anisotrop. Die energiearmen kleinsten Skalen sind im allgemeinen geometrieunabhängig, homogen und isotrop. Das Konzept der Grobstruktursimulation ist, die großen Wirbel direkt zu berechnen und die kleinen Wirbelstrukturen zu modellieren. Die Zerlegung der turbulenten Strömung

⁴Die Reynolds-Zahl Re ist etwa zwei Größenordnungen größer als die turbulente Reynolds-Zahl Re_t : $Re_t \approx 0,01 \times Re$

in zwei Teile erfolgt im mathematischen Sinn durch die Einführung eines Filters mit der Filterweite Δ und einer Filterfunktion G . Durch Filterung der Navier-Stokes Gleichungen entsteht ein zusätzlicher Term, der die Wirkung der kleinskaligen Wirbel repräsentiert und mit Hilfe von Feinstrukturmodellen beschrieben wird. Das resultierende Gleichungssystem ist stets dreidimensional und instationär.

Bei gegebener Gitterauflösung nimmt die Bedeutung des Feinstrukturmodells mit steigender Reynolds-Zahl zu, da wegen der Verbreiterung des turbulenten Spektrums (siehe (2.23)) ein zunehmender Teil der turbulenten Wirbel modelliert werden muss. Dies erfordert die Entwicklung geeigneter Feinstrukturmodelle, worin nach Ansicht von Wilcox [58] die Problematik dieses Ansatzes liegt. Die vom Ansatz oft einfachen Feinstrukturmodelle modellieren einen relativ großen Anteil des turbulenten Wirbelspektrums. Die Grobstruktursimulation (engl. Large Eddy Simulation oder kurz: LES) einer homogenen, isotropen turbulenten Strömung durch Ferziger [13] ergab beispielsweise einen Anteil von 20-29 % der modellierten zur gesamten turbulenten kinetischen Energie. Ein Anteil von 30 % sollte jedoch aus Genauigkeitsgründen nicht überschritten werden [35].

Das Feinstrukturmodell sollte zudem in der Lage sein, den zu beobachtenden Energietransfer von kleinen zu großen Skalen (*backscatter*) zu berücksichtigen, der im Widerspruch zur Vorstellung der Energiekaskade steht und zu numerischen Instabilitäten des Verfahrens führen kann [14]. In der Nähe fester Wände nimmt die Größe der großen Wirbelstrukturen ab, was eine feinere Gitterauflösung erfordert. Deshalb wird bei wandanliegenden Strömungen häufig die Auflösung wandnaher Bereiche durch eine Modellierung mit Wandfunktionen ersetzt. Verbesserte Modellierungen auch für abgelöste Strömungen sind neben der Entwicklung geeigneter Feinstrukturmodelle erforderlich, um LES auch für komplexere Strömungen einsetzen zu können.

Der Einsatz der Grobstruktursimulation für technisch relevante Anwendungsfälle, in denen kohärente Strukturen und Gebiete stochastischer Turbulenz vorhanden und bedeutsam sind, wie beispielsweise drallbehaftete Strömungen in Brennkammergeometrien, wird angesichts der weiterhin rasanten Entwicklung der Rechnerkapazitäten zunehmend an Bedeutung gewinnen.

2.3.3 Statistische Beschreibung

Für technische Anwendungen ist oft die statistische Beschreibung turbulenter Strömungen ausreichend, die lediglich die mittlere Wirkung der Turbulenz berücksichtigt. Ausgangspunkt der Methode ist die Aufspaltung der zufällig schwankenden Strömungsgrößen in Mittelwert und Schwankungsanteil.

$$\phi(x_i, t) = \bar{\phi}(x_i, t) + \phi'(x_i, t) \quad (2.24)$$

$$\bar{\phi}(x_i, t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \phi_k(x_i, t) \quad (2.25)$$

$$\bar{\phi}(x_i) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \phi(x_i, t) dt \quad (2.26)$$

Die Bestimmung des Mittelwerts erfolgt im allgemeinsten Fall mit Hilfe der Ensemblemitteilung (2.25). Dabei wird unter Beibehaltung aller Anfangs- und Randbedingungen die Strömung n -fach realisiert und die Größe am selben Ort nach derselben Zeit n -fach gemessen. In statistisch stationären Strömungen kann eine zeitliche Mittelung vorgenommen werden (2.26).

Dabei wird die Größe $\phi(x_i, t)$ über ein genügend langes Zeitintervall am festen Ort gemessen. Bei der Mittelung verschwindet der Schwankungsanteil der Strömungsgröße definitionsgemäß. Das Einsetzen der Aufspaltung (2.24) in die Bilanzgleichungen für Masse (2.7), Impuls (2.9) und Energie (2.11) bzw. Temperatur (2.12) für inkompressible Newton'sche Fluide und anschließende Mittelwertbildung führt auf die Bilanzsätze der mittleren Erhaltungsgrößen, die so genannten Reynolds'schen Gleichungen.

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0 \quad (2.27)$$

$$\frac{\partial(\rho \bar{u}_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \bar{u}_j \bar{u}_i)}{\partial x_j} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - \rho \overline{u'_j u'_i} \right) + \rho \bar{f}_i \quad (2.28)$$

$$\frac{\partial(\rho c_p \bar{T})}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \bar{u}_j c_p \bar{T})}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\lambda \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j} - \rho c_p \overline{u'_j T'} \right) \quad (2.29)$$

Wegen des nichtlinearen Konvektionsterms in den Erhaltungsgleichungen für Impuls (2.9) und Energie (2.11) entsteht aus der Mittelung jeweils ein neuer Term in den Gleichungen. Der Term $\rho \overline{u'_j u'_i}$ in der Impulserhaltungsgleichung (2.28) ist der Reynolds'sche Spannungstensor. Er beschreibt den turbulenzbedingten Impulstransport. Der turbulente Wärmestromvektor $\rho \overline{u'_j T'}$ in der Bilanzgleichung der mittleren Temperatur (2.29) beschreibt den turbulenzbedingten Wärme- bzw. Temperaturtransport.

Aufgrund der zusätzlichen unbekannten Terme ist das Gleichungssystem (2.27)-(2.29) nicht geschlossen lösbar, da es mehr unbekannte Größen als verfügbare Gleichungen gibt. Auf analytischem Weg ist es nicht möglich, das Gleichungssystem zu schließen, da bei der Entwicklung von Transportgleichungen für die unbekannten Korrelationen stets neue

unbekannte Terme entstehen. Das Schließungsproblem ist das Grundproblem der statistischen Beschreibung turbulenter Strömungen. Die aus den Navier-Stokes Gleichungen ableitbare Transportgleichung für den Reynolds'schen Spannungstensor [58] verdeutlicht dies:

$$\frac{\partial(\overline{\rho u'_i u'_j})}{\partial t} + \frac{\partial(\overline{\rho u'_k u'_i u'_j})}{\partial x_j} = P_{ij} - \epsilon_{ij} - \Pi_{ij} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\mu \frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_k} - \rho C_{ijk} \right) + \overline{\rho u'_i f'_j} + \overline{\rho u'_j f'_i} \quad (2.30)$$

mit

$$P_{ij} = -\overline{\rho u'_i u'_k} \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_k} - \overline{\rho u'_j u'_k} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_k} \quad \text{Produktion} \quad (2.31)$$

$$\Pi_{ij} = \overline{p' \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right)} \quad \text{Druck-Scher Korrelation} \quad (2.32)$$

$$\epsilon_{ij} = 2\mu \overline{\left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial u'_j}{\partial x_k} \right)} \quad \text{Dissipation} \quad (2.33)$$

$$\rho C_{ijk} = \overline{\rho u'_i u'_j u'_k} + \overline{p' u'_i} \delta_{jk} + \overline{p' u'_j} \delta_{ik} \quad \text{Diffusion} \quad (2.34)$$

Ein Großteil der Terme in der Transportgleichung des Reynolds-Spannungstensors (2.30) enthalten neue, unbekannte Korrelationen wie beispielsweise die Tripelkorrelation im Diffusionsterm (2.34). Auch der Druck-Scher Korrelationstensor (2.32) und der Dissipations-tensor (2.33) sind nicht direkt bestimmbar. Prinzipiell kann man auch für diese Terme Differentialgleichungen herleiten, die jedoch wiederum unbekannte Korrelationen enthalten. Es ist also nicht möglich, das Gleichungssystem auf diesem Weg zu schließen. Aufgabe der Turbulenzmodelle ist es, durch geeignete Approximation des unbekannten Reynolds-Spannungstensors das Gleichungssystem (2.27)-(2.29) lösbar zu machen. Dabei ist die kinetische Energie k der turbulenten Geschwindigkeitsfluktuationen eine wichtige Hilfsgröße, die definitionsgemäß der halben Spur des Reynolds-Spannungstensors entspricht:

$$k = \frac{1}{2} \overline{u'_i u'_i} \quad (2.35)$$

Die Bilanzgleichung der turbulenten kinetischen Energie (2.36) ist entsprechend durch Kontraktion⁵ der Transportgleichung des Reynolds-Spannungstensors (2.30) ableitbar.

$$\frac{\partial(\rho k)}{\partial t} + \frac{\partial(\overline{\rho u'_j k})}{\partial x_j} = \underbrace{-\overline{\rho u'_i u'_j} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j}}_{P_k} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu \frac{\partial k}{\partial x_j} - \frac{\rho}{2} \overline{u'_i u'_i u'_j} - \overline{p' u'_j} \right) - \underbrace{\mu \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial u'_i}{\partial x_k}}_{\epsilon} \quad (2.36)$$

⁵Gleichsetzen der Indizes und Ausführung der Summation

Turbulenzmodelle lassen sich formal in zwei Klassen aufteilen, die auf unterschiedlichen Modellierungsansätzen für den unbekannten Reynolds-Spannungstensor beruhen. In algebraischen Turbulenzmodellen wird der Reynolds-Spannungstensor als lokale Funktionen des mittleren Geschwindigkeitsgradienten sowie eines charakteristischen turbulenten Längen- und Zeitmaßes modelliert. Die algebraischen Turbulenzmodelle werden im folgenden Kapitel 2.4 ausführlich beschrieben. In differentiellen Turbulenzmodellen⁶ werden die unbekannten Terme in der Transportgleichung für den Reynolds-Spannungstensor geeignet modelliert. Im Anhang A der Arbeit befindet sich ein ausführlicherer Überblick differentieller Turbulenzmodelle, da sie nicht im Mittelpunkt der Arbeit stehen, aber für diese Arbeit von Bedeutung sind.

2.4 Algebraische Modelle

Algebraische Turbulenzmodelle modellieren den unbekannten Reynolds-Spannungstensor in Abhängigkeit des Gradienten der mittleren Geschwindigkeit sowie eines turbulenten Zeit- und eines Längenmaßes.

$$\overline{u'_i u'_j} = F \left[\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j}, l_t, t_t \right] \quad \text{mit} \quad t_t = \frac{k}{\epsilon}, \quad l_t = \frac{k^{\frac{3}{2}}}{\epsilon} \quad (2.37)$$

Das turbulente Zeitmaß wird hierbei durch die turbulente kinetische Energie k ausgedrückt (2.35). Zur Bestimmung des turbulenten Längenmaßes wird die Dissipationsrate ϵ benutzt. Ansatz (2.37) beruht auf der Annahme, dass die Detailstruktur der Turbulenz mit zwei Parametern beschreibbar ist. Eine Parametrisierung der Turbulenz durch ein charakteristisches Längen- und ein Zeitmaß der turbulenten Wirbel ist für Strömungen zulässig, in denen lokale Effekte gegenüber Transportprozessen dominieren. Werden nur turbulente Strömungen großer Reynolds-Zahlen betrachtet, muss der Einfluss der Viskosität im Ansatz (2.37) nicht berücksichtigt werden. Ausgehend von Gleichung (2.37) kann mit Hilfe dimensionsanalytischer Betrachtungen (II- oder Buckingham-Theorem) sowie durch Anwendung der Methode der Invariantenmodellierung und des Cayley-Hamilton Theorems eine allgemeine konstitutive Gleichung zur Bestimmung des Reynolds-Spannungstensors hergeleitet werden [48, 32]. Das Cayley-Hamilton Theorem begrenzt die Zahl der linear unabhängigen Tensoren, da ein beliebiger Tensor zweiter Stufe A_{ij} seine Eigenwertgleichung (2.38) in Abhängigkeit seiner Hauptinvarianten (2.39) erfüllen muss.

⁶die auch als Schließungsansätze 2. Ordnung oder Reynolds-Spannungs Modelle bezeichnet werden

$$A_{ij}^3 - IA_{ij}^2 + IIA_{ij} - III\delta_{ij} = 0 \quad \text{mit} \quad (2.38)$$

$$I = A_{ii}, \quad II = \frac{1}{2}(A_{ii}A_{jj} - A_{ii}^2), \quad III = \frac{1}{6}(A_{ii}A_{jj}A_{kk} - 3A_{ii}A_{jj}^2 + 2A_{ii}^3) \quad (2.39)$$

Die allgemeine konstitutive Gleichung (2.40) kann als grundlegende Beziehung zur Bestimmung des Reynolds-Spannungstensors algebraischer Turbulenzmodelle aufgefasst werden. Die in Gleichung (2.40) auftretenden Koeffizienten $a_1 - a_{18}$ sind zunächst beliebige Funktionen der Invarianten der in Beziehung (2.40) vorkommenden Tensoren sowie der Hauptinvarianten des Tensors des Geschwindigkeitsgradienten, der in Gleichung (2.40) in einer kompakteren Schreibweise dargestellt ist ($\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} = \bar{u}_{i,j}$). Sie werden bei der Entwicklung unterschiedlicher Turbulenzmodelle anhand experimenteller Daten kalibriert. Desweiteren unterscheiden sich algebraische Turbulenzmodelle in der Tensorordnung der im jeweiligen Modell berücksichtigten Terme.

$$\begin{aligned} \overline{u'_i u'_j} = & \frac{2}{3}k\delta_{ij} + 2a_2 \frac{k^2}{\epsilon} \left[\bar{u}_{i,j} + \bar{u}_{j,i} - \frac{2}{3}\bar{u}_{k,k}\delta_{ij} \right] \\ & + 2a_4 \frac{k^3}{\epsilon^2} \left[\bar{u}_{i,k}\bar{u}_{k,j} + \bar{u}_{j,k}\bar{u}_{k,i} - \frac{2}{3}\bar{u}_{p,q}\bar{u}_{q,p}\delta_{ij} \right] \\ & + 2a_6 \frac{k^3}{\epsilon^2} \left[\bar{u}_{i,k}\bar{u}_{j,k} - \frac{1}{3}\bar{u}_{p,q}\bar{u}_{p,q}\delta_{ij} \right] + 2a_7 \frac{k^3}{\epsilon^2} \left[\bar{u}_{k,i}\bar{u}_{k,j} - \frac{1}{3}\bar{u}_{p,q}\bar{u}_{p,q}\delta_{ij} \right] \\ & + 2a_8 \frac{k^4}{\epsilon^3} \left[\bar{u}_{i,k}\bar{u}_{j,k}^2 + \bar{u}_{i,k}^2\bar{u}_{j,k} - \frac{2}{3}\bar{u}_{p,q}\bar{u}_{p,q}^2\delta_{ij} \right] \\ & + 2a_{10} \frac{k^4}{\epsilon^3} \left[\bar{u}_{k,i}\bar{u}_{k,j}^2 + \bar{u}_{k,i}^2\bar{u}_{k,j} - \frac{2}{3}\bar{u}_{p,q}\bar{u}_{p,q}^2\delta_{ij} \right] \\ & + 2a_{12} \frac{k^5}{\epsilon^4} \left[\bar{u}_{i,k}^2\bar{u}_{j,k}^2 - \frac{1}{3}\bar{u}_{p,q}^2\bar{u}_{p,q}^2\delta_{ij} \right] + 2a_{13} \frac{k^5}{\epsilon^4} \left[\bar{u}_{k,i}^2\bar{u}_{k,j}^2 - \frac{1}{3}\bar{u}_{p,q}^2\bar{u}_{p,q}^2\delta_{ij} \right] \\ & + 2a_{14} \frac{k^5}{\epsilon^4} \left[\bar{u}_{i,k}\bar{u}_{l,k}\bar{u}_{l,j}^2 + \bar{u}_{k,i}^2\bar{u}_{k,l}\bar{u}_{j,l} - \frac{2}{3}\bar{u}_{p,q}\bar{u}_{l,q}\bar{u}_{l,p}^2\delta_{ij} \right] \\ & + 2a_{16} \frac{k^6}{\epsilon^5} \left[\bar{u}_{i,k}\bar{u}_{l,k}^2\bar{u}_{l,j}^2 + \bar{u}_{k,i}^2\bar{u}_{k,l}^2\bar{u}_{j,l} - \frac{2}{3}\bar{u}_{p,q}\bar{u}_{l,q}^2\bar{u}_{l,p}^2\delta_{ij} \right] \\ & + 2a_{18} \frac{k^7}{\epsilon^6} \left[\bar{u}_{i,k}\bar{u}_{l,k}\bar{u}_{l,m}^2\bar{u}_{j,m}^2 + \bar{u}_{i,k}^2\bar{u}_{l,k}^2\bar{u}_{l,m}\bar{u}_{j,m} - \frac{2}{3}\bar{u}_{p,k}\bar{u}_{l,k}\bar{u}_{l,m}^2\bar{u}_{p,m}^2\delta_{ij} \right] \end{aligned} \quad (2.40)$$

Werden lediglich die linearen Terme der allgemeinen konstitutiven Gleichung berücksichtigt und alle höheren Tensorordnungen vernachlässigt, ergibt sich die einfachste und bis heute am weitesten verbreitete Konstitutivgleichung zur Bestimmung des Reynolds-Spannungstensors.

$$\overline{u'_i u'_j} = \frac{2}{3} k \delta_{ij} - \nu_t \left(\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i} \right) \quad (2.41)$$

Gleichung (2.41) wird auch als Boussinesq Approximation bezeichnet. Sie wurde ursprünglich ausgehend von phänomenologischen Überlegungen in Anlehnung an das Materialgesetz Newton'scher Fluide (2.8) formuliert, um die Wirkung der Turbulenz durch eine erhöhte (turbulente) Viskosität ausdrücken zu können. Der erste Term auf der rechten Seite der Boussinesq Approximation (2.41) wird eingeführt, damit die Gleichung bei einer Kontraktion in inkompressiblen Strömungen gültig bleibt.

Mit der Einführung der Wirbelviskosität ν_t , die im Gegensatz zur molekularen Viskosität eine Eigenschaft der Strömung und nicht des Fluids ist, wird das Problem auf die Bestimmung der unbekannten Wirbelviskosität verlagert. Aus dimensionsanalytischen Überlegungen wird eine Abhängigkeit der Wirbelviskosität von einem turbulenten Geschwindigkeits- bzw. Zeitmaß sowie einem Längenmaß angenommen⁷.

$$\nu_t \sim U_t l_t \quad (2.42)$$

Die auf der Boussinesq Approximation aufbauenden Turbulenzmodelle unterscheiden sich in der Wahl geeigneter Parameter zur Bestimmung der turbulenten Skalen sowie in der Zahl der zusätzlich gelösten Transportgleichungen zu deren Berechnung. Als geeignetes turbulentes Geschwindigkeitsmaß hat sich die turbulente kinetische Energie allgemein durchgesetzt. Bei der Auswahl einer geeigneten Größe zur Bestimmung des turbulenten Längenmaßstabs gibt es unterschiedliche Ansätze, da keine eindeutige Methode für die Bestimmung des turbulenten Längenmaßstabs vorliegt. Nachfolgend werden die hier verwendeten Wirbelviskositätsmodelle vorgestellt.

2.4.1 Lineares EVM: Das k - ϵ Turbulenzmodell

Beim k - ϵ Turbulenzmodell werden die turbulente kinetische Energie k und die Dissipationsrate ϵ als Größen zur Bestimmung des turbulenten Geschwindigkeits- und Zeitmaßstabs benutzt. Durch Einsetzen der Größen in den Zusammenhang (2.42) und Einführung einer Proportionalitätskonstanten ergibt sich die Bestimmungsgleichung der Wirbelviskosität.

$$\nu_t = C_\mu \frac{k^2}{\epsilon} \quad (2.43)$$

⁷Die Wirbelviskosität ν_t hat die Einheit $[m^2/s]$, das turbulente Geschwindigkeitsmaß $[m/s]$ und das turbulente Längenmaß $[m]$

Für beide betrachteten Größen wird je eine Transportgleichung gelöst. Ausgangspunkt bei der Entwicklung einer Transportgleichung für k ist die exakte Transportgleichung für die turbulente kinetische Energie (2.36). Wie die Evolutionsgleichung für $\overline{u'_i u'_j}$ enthält auch die Gleichung der turbulenten kinetischen Energie unbekannte Terme, die durch Gradientenflussansätze geschlossen werden. Für die Dissipationsrate ϵ kann ebenfalls eine Transportgleichung aus den Navier-Stokes Gleichungen (2.27)-(2.28) hergeleitet werden⁸. Wegen ihrer Komplexität ist die Modellierung der unbekannten Terme mit vielen weitreichenden heuristischen Annahmen verbunden.

$$\frac{\partial(\rho k)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \overline{u_j k})}{\partial x_j} = \underbrace{\mu_t \left(\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j}}_{P_k} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] - \rho \epsilon \quad (2.44)$$

$$\frac{\partial(\rho \epsilon)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \overline{u_j \epsilon})}{\partial x_j} = C_{\epsilon 1} \frac{\epsilon}{k} P_k - C_{\epsilon 2} \frac{\epsilon^2}{k} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} \right] \quad (2.45)$$

Im Gleichungssystem (2.43)-(2.45) sind insgesamt fünf freie Koeffizienten enthalten. Die von Launder und Spalding [30] vorgeschlagene Kalibration der Koeffizienten, die in Tabelle 2.1 aufgeführt sind, hat sich als allgemeiner Standard für das k - ϵ Modell etabliert.

C_μ	$C_{\epsilon 1}$	$C_{\epsilon 2}$	σ_k	σ_ϵ
0,09	1,44	1,92	1,0	1,3

Tabelle 2.1: Koeffizienten des k - ϵ Modells

2.4.2 Lineares EVM: Das k - ω Turbulenzmodell

Beim k - ω Turbulenzmodell von Wilcox [57] wird statt der Dissipationsrate ϵ die Größe ω mit der Dimension eines inversen Zeitmaßes zur Bestimmung des turbulenten Längenmaßstabs und damit zur Bestimmung der turbulenten Viskosität benutzt. Diese Größe kann als turbulente Frequenz oder spezifische Dissipationsrate interpretiert werden. Durch den Austausch der Dissipationsrate ϵ mit der spezifischen Dissipationsrate ω konnten Verbesserungen bei der Vorhersage von durch Druckgradienten aufgeprägten Strömungsablösungen erzielt werden, denn bei Verwendung der Beziehung (2.43) wird der Betrag der Wirbelviskosität aufgrund der in Wandnähe berechneten Dissipationsrate allgemein überschätzt und damit das Auftreten der Strömungsablösung behindert.

$$\nu_t = \frac{k}{\omega}, \quad \omega = \frac{\epsilon}{k} \quad (2.46)$$

⁸Details der Herleitung und der Modellierung sind bei Wilcox [58] zu finden.

Für die beiden verwendeten turbulenten Größen werden die nachfolgend angegebenen Transportgleichungen gelöst.

$$\frac{\partial(\rho k)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \overline{u_j k})}{\partial x_j} = P_k + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right] - \rho \beta^* k \omega \quad (2.47)$$

$$\frac{\partial(\rho \omega)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \overline{u_j \omega})}{\partial x_j} = \alpha \frac{\omega}{k} P_k + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\omega} \right) \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right] - \beta \rho \omega^2 \quad (2.48)$$

Die Werte der fünf freien Koeffizienten des Turbulenzmodells sind in Tabelle 2.2 aufgeführt.

α	β	β^*	σ_k	σ_ω
5/9	3/40	9/100	2,0	2,0

Tabelle 2.2: Koeffizienten des k - ω Modells

2.4.3 Lineares EVM: Das BSL Turbulenzmodell

Bei diesem von Menter [36] entwickelten Turbulenzmodell handelt es sich um eine Variante des k - ω Turbulenzmodells. Hier wird durch Einsetzen der Beziehung $\epsilon = \omega k$ in die Transportgleichung für ϵ des k - ϵ Turbulenzmodells (2.45) eine Transportgleichung für ω erzeugt. Durch die Umformulierung entsteht in der Gleichung für ω ein zusätzlicher Term, der als Kreuz-Diffusionsterm bezeichnet wird und in der von Wilcox [57] vorgeschlagenen Transportgleichung für ω (2.48) nicht enthalten ist. Motivation für die Weiterentwicklung war die beim k - ω Turbulenzmodell beobachtete Abhängigkeit der erzielten Lösung von Freistromwerten der spezifischen Dissipationsrate ω .

$$\frac{\partial(\rho k)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \overline{u_j k})}{\partial x_j} = P_k + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_{k3}} \right) \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right] - \rho \beta^* k \omega \quad (2.49)$$

$$\frac{\partial(\rho \omega)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \overline{u_j \omega})}{\partial x_j} = \frac{\gamma_3}{\nu_t} P_k + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_{\omega 3}} \right) \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right] - \beta_3 \omega^2 - 2\rho(1 - F_1)\sigma_{\omega 2} \frac{1}{\omega} \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \quad (2.50)$$

mit

$$F_1 = \tanh(\arg_1^4) \quad (2.51)$$

$$\arg_1 = \min \left[\max \left(\frac{\sqrt{k}}{0,09\omega y}; \frac{500\nu}{y^2\omega} \right); \frac{4\rho\sigma_{\omega 2}k}{(\arg_2)y^2} \right] \quad (2.52)$$

$$\arg_2 = \max \left(2\rho\sigma_{\omega 2} \frac{1}{\omega} \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j}, 10^{-20} \right) \quad (2.53)$$

Durch Einführen einer zusätzlichen Funktion F_1 im BSL Turbulenzmodell wird erreicht, dass der zusätzliche Term in Gleichung (2.50) in der Nähe fester Wände verschwindet ($F_1 \rightarrow 1$) und dort die freien Koeffizienten des Turbulenzmodells die von Wilcox [57] in seinem k - ω Turbulenzmodell angegebenen Werte annehmen (vgl. Tabelle 2.3). Abseits fester Wände nimmt die Funktion F_1 den Wert 0 an und gleichzeitig gehen die Werte der freien Koeffizienten mit Hilfe der allgemeinen Transformationsbeziehung für die Modellkonstanten (2.54) in die Werte des k - ϵ Turbulenzmodells über. Die Vorteile des k - ω Modells in Wandnähe wird so mit den Vorteilen der k - ϵ Formulierung fernab fester Wände kombiniert. In Tabelle 2.3 sind die Werte der Modellkonstanten für beide Grenzfälle dargestellt.

$$\Phi_3 = F_1 \Phi_1 + (1 - F_1) \Phi_2 \quad (2.54)$$

Damit wird das BSL abseits fester Wände effektiv zu einem (transformierten) k - ϵ Turbulenzmodell und in Wandnähe zu dem von Wilcox [57] angegebenen k - ω Turbulenzmodell.

	σ_{ki}	$\sigma_{\omega i}$	β_i	β^*	γ_i
$i = 1, (k-\omega)$	2,0	2,0	0,075	0,09	0,55
$i = 2, (k-\epsilon)$	1,0	0,856	0,0828	0,09	0,44

Tabelle 2.3: Koeffizienten des BSL Modells

2.4.4 Lineares EVM: Das SST Turbulenzmodell

Beim SST Turbulenzmodell von Menter [36] handelt es sich um eine Variante des BSL Turbulenzmodells. Es werden wieder die beim BSL Turbulenzmodell in Abschnitt 2.4.2 vorgestellten Transportgleichungen für k und ω gelöst (2.47)-(2.48). Die Berechnung der Wirbelviskosität erfolgt gemäß Beziehung

$$\nu_t = \frac{a_1 k}{\max(a_1 \omega; S F_2)} \quad (2.55)$$

wobei

$$a_1 = 0,31, \quad S = \sqrt{\left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}}, \quad F_2 = \tanh(\arg_3^2) \quad (2.56)$$

$$\arg_3 = \max\left(2 \frac{\sqrt{k}}{\beta^* \omega y}; \frac{500 \nu}{y^2 \omega}\right) \quad (2.57)$$

Weitere Unterschiede zum zuvor vorgestellten BSL Turbulenzmodell betreffen die Wahl der freien Koeffizienten. Beim SST Turbulenzmodell wird in Wandnähe ein im Vergleich

zum BSL Turbulenzmodell etwas modifizierter Koeffizientensatz verwendet. Gleichung (2.55) beschränkt in Wandnähe den Betrag der berechneten Wirbelviskosität noch weiter als mit den anderen beiden k - ω basierten Modellen, um Ort und Umfang von Gebieten mit Strömungsablösungen besser berechnen zu können.

	σ_{ki}	$\sigma_{\omega i}$	β_i	β^*	γ_i
$i = 1, (k-\omega)$	1,18	2,0	0,075	0,09	0,55
$i = 2, (k-\epsilon)$	1,0	0,856	0,0828	0,09	0,44

Tabelle 2.4: Koeffizienten des SST Modells

2.4.5 Quasi-lineares EVM: Das QLM Turbulenzmodell

Bei diesem Turbulenzmodell von Pettersson-Reif et al. [41] handelt es sich um eine Erweiterung der einfachen linearen Turbulenzmodelle. Zum einen wird die Modellkonstante C_μ durch ein variables C_μ^* ersetzt und zum anderen die Bestimmungsgleichung der Wirbelviskosität verändert. Die Anpassungen wurden zunächst in Zusammenhang mit dem v^2 - f Modell vorgeschlagen, können aber auch für das k - ϵ Turbulenzmodell verwendet werden [40]. Zweck der Modifikationen ist eine Sensibilisierung linearer Wirbelviskositätsmodelle bezüglich der durch Stromlinienkrümmung hervorgerufenen Effekte in turbulenten Strömungen.

$$\nu_t = \min\left(\frac{C_\mu^* k^2}{\epsilon}, \frac{k}{\sqrt{6S_{ij}S_{ji}}}\right) \quad (2.58)$$

$$C_\mu^* = C_\mu \frac{F_1}{F_2}, \quad F_1 = \frac{1 + \alpha_2|\eta_3| + \alpha_3\eta_3}{1 + \alpha_4|\eta_3|}, \quad F_2 = \sqrt{\frac{1 + \alpha_5\eta_1}{1 + \alpha_5\eta_2}} + \alpha_1\sqrt{\eta_3}\sqrt{|\eta_3| - \eta_3} \quad (2.59)$$

$$\eta_1 = S_{ij}^* S_{ji}^*, \quad \eta_2 = W_{ij}^* W_{ji}^*, \quad \eta_3 = \eta_1 - \eta_2 \quad (2.60)$$

$$S_{ij}^* = S_{ij} \frac{k}{\epsilon}, \quad W_{ij}^* = (W_{ij} + 1,25\epsilon_{ijk}\Omega_k) \frac{k}{\epsilon} \quad (2.61)$$

2.4.6 Quadratisches EASM: ASM Turbulenzmodell

Beim ASM Turbulenzmodell handelt es sich formal um ein explizites nichtlineares Reynolds-Spannungsmodell zweiter Ordnung, das von Abid, Rumsey und Gatski [1] vorgeschlagen

α_1	α_2	α_3	α_4	α_5
1/18	1/2	1/4	1/5	1/40

Tabelle 2.5: Koeffizienten des QLM Modells

wurde. Es berücksichtigt Terme bis zur zweiten Tensorordnung der allgemeinen Konstitutivgleichung (2.40) zur Bestimmung des Reynolds-Spannungstensors und kann dementsprechend auch als nichtlineares Wirbelviskositätsmodell zweiter Ordnung aufgefasst werden.

$$\begin{aligned} \overline{u'_i u'_j} = & \frac{2}{3} k \delta_{ij} - 2\nu_t \left[\left(S_{ij} - \frac{1}{3} S_{kk} \delta_{ij} \right) \right. \\ & \left. + \frac{\alpha_4}{\omega} \left(S_{ik} W_{kj} + S_{jk} W_{ki} \right) - \frac{\alpha_5}{\omega} \left(S_{ik} S_{kj} - \frac{1}{3} S_{kl} S_{kl} \delta_{ij} \right) \right] \end{aligned} \quad (2.62)$$

Die Wirbelviskosität ν_t wird in Abhängigkeit der turbulenten kinetischen Energie, der spezifischen Dissipationsrate ω sowie einer variablen Modellkonstanten C_μ^* bestimmt.

$$\nu_t = C_\mu^* \frac{k}{\omega} \quad (2.63)$$

Die variable Modellkonstante C_μ^* (2.64) ist ähnlich wie bei dem im vorigen Abschnitt beschriebenen Modell von Pettersson-Reif et al. [41] in Abhängigkeit der Invarianten $S_{ij}S_{ij}$ und $W_{ij}W_{ij}$ modelliert worden.

$$C_\mu^* = \frac{3(1 + \eta^2)\alpha_1}{3 + \eta^2 + 6\eta^2\xi^2 + 6\xi^2} \quad (2.64)$$

mit

$$\eta^2 = \left(\frac{\alpha_2}{\omega^2} \right) S_{ij}S_{ij}, \quad \xi^2 = \left(\frac{\alpha_3}{\omega^2} \right) W_{ij}W_{ij} \quad (2.65)$$

Die in den Gleichungen (2.62)-(2.65) auftretenden freien Koeffizienten α_i bestimmen sich mit den in Tabelle 2.6 aufgeführten zugehörigen Koeffizienten folgendermaßen:

$$\alpha_1 = \left(\frac{4}{3} - C_2 \right) \frac{g}{2}, \quad \alpha_2 = (2 - C_3)^2 \frac{g^2}{4}, \quad \alpha_3 = (2 - C_4)^2 \frac{g^2}{4}, \quad (2.66)$$

$$\alpha_4 = \left(\frac{2 - C_4}{2} \right) g, \quad \alpha_5 = (2 - C_3)g, \quad g = \frac{1}{(C_1/2 + C_5 - 1)} \quad (2.67)$$

C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
3,0	0,8	1,75	1,31	2,0

Tabelle 2.6: Koeffizienten des ASM Modells

2.4.7 Kubisches NLEVM: Das CIY Turbulenzmodell

Das CIY Modell ist ein nichtlineares Wirbelviskositätsmodell dritter Ordnung. Es wurde von Craft, Iacovides und Yoon [8] vorgeschlagen, die das kubische Modell von Craft, Launder und Suga [9] weiterentwickelten. Die Veränderungen betreffen im Wesentlichen die Modellierung der Abhängigkeit des linearen Modellkoeffizienten C_μ sowie der Zuordnung der quasi linearen Terme der Form $S_{ij}S_{kl}S_{kl}$, die formal von kubischer Ordnung sind, zur linearen Termgruppe. Damit soll eine erhöhte numerische Robustheit erreicht werden.

$$\begin{aligned}
\overline{u'_i u'_j} = & \frac{2}{3}k\delta_{ij} - 2\nu_t S_{ij} + 4c_1\nu_t \frac{k}{\epsilon} \left(S_{ik}S_{kj} - \frac{1}{2}S_{kl}S_{kl}\delta_{ij} \right) \\
& + 4c_2\nu_t \frac{k}{\epsilon} \left(W_{ik}S_{kj} + W_{jk}S_{ki} \right) + 4c_3\nu_t \frac{k}{\epsilon} \left(W_{ik}W_{jk} - \frac{1}{3}W_{lk}W_{lk}\delta_{ij} \right) \\
& + 8c_4\nu_t \frac{k^2}{\epsilon^2} \left(S_{ki}W_{lj} + S_{kj}W_{li} \right) S_{kl} \\
& + 8c_5\nu_t \frac{k^2}{\epsilon^2} \left(W_{il}W_{lm}S_{mj} + S_{il}W_{lm}W_{mj} - \frac{2}{3}S_{lm}W_{mn}W_{nl}\delta_{ij} \right) \\
& + 8c_6\nu_t \frac{k^2}{\epsilon^2} S_{ij}S_{kl}S_{kl} + 8c_7\nu_t S_{ij}W_{kl}W_{kl}
\end{aligned} \tag{2.68}$$

Die Wirbelviskosität ν_t wird wie bereits beim k - ϵ Modell gesehen in Abhängigkeit der turbulenten kinetischen Energie, der Dissipationsrate ϵ sowie einer Modellkonstanten C_μ bestimmt.

$$\nu_t = C_\mu \frac{k^2}{\epsilon} \tag{2.69}$$

Im Unterschied zum k - ϵ Modell ist die Modellkonstante C_μ abhängig von Parametern der turbulenten Strömung. Sie ergibt sich wie folgt:

$$C_\mu = \min \left[0,09, \frac{1,2}{1 + 3,5\eta + f_{RS}} \right] \tag{2.70}$$

$$f_{rs} = 0,235(\max(0, \eta - 3,333))^2 e^{-k^2 400/\nu\epsilon} \tag{2.71}$$

mit

$$\eta = \max(\tilde{S}, \tilde{W}), \quad \tilde{S} = \frac{k}{\epsilon} \sqrt{2S_{ij}S_{ij}}, \quad \tilde{W} = \frac{k}{\epsilon} \sqrt{2W_{ij}W_{ij}} \quad (2.72)$$

c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	c_6	c_7
-0,1	0,1	0,26	$-10C_\mu^2$	0	$-5C_\mu^2$	$5C_\mu^2$

Tabelle 2.7: Koeffizienten des CIY Modells

3 Drallströmungen

Drallströmungen werden in einer Vielzahl technischer Anwendungen eingesetzt. Insbesondere in der Verbrennungstechnik haben sich Drallströmungen wegen der stabilisierenden Wirkung auf Flammen und wegen der deutlich verbesserten Möglichkeiten der Brennstoffaufbereitung auf breiter Front durchgesetzt. Nicht zuletzt deshalb wird in Flugtriebwerken ein Teil der vom Verdichter kommenden Luft beim Eintritt in die Brennkammer mit Drall beaufschlagt. Der Einsatz von Drall hat aber neben einem erhöhten Druckverlust noch weiter reichende Auswirkungen auf das Strömungsfeld. Einen ausführlichen Überblick über diese Thematik verschafft beispielsweise das Buch von Gupta, Lilley und Syred [20]. Die folgenden Abschnitte behandeln die wichtigsten Aspekte zur Beschreibung und Charakterisierung drallbehafteter Strömungen, da der Drall den dominierenden Einflussfaktor auf das Strömungsgeschehen in Gasturbinenbrennkammern darstellt.

3.1 Das Tangentialgeschwindigkeitsfeld

Die Beschreibung drallbehafteter Strömungen ist in Polar- bzw. Zylinderkoordinaten oft am zweckmäßigsten, obwohl die Bilanzgleichungen von Masse (2.7), Impuls (2.9), Energie (2.11) und Stoff (2.15) in kartesischer Schreibweise gleichermaßen gelten. Aus den Impulserhaltungsgleichungen in Zylinderkoordinaten, die beispielsweise bei Spurk [53] und auch im Anhang B zu finden sind, lassen sich unter vereinfachenden Annahmen (stationär, eben, homogen in Axialrichtung) analytische Lösungen der Tangentialgeschwindigkeitsverteilung $U_\varphi(r)$ finden, die oft zur Charakterisierung realer Drallströmungen benutzt werden. Unter oben genannten Bedingungen vereinfacht sich die Impulserhaltungsgleichung der Tangentialgeschwindigkeitskomponente (B.2) zu

$$\frac{\partial^2 U_\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_\varphi}{\partial r} - \frac{U_\varphi}{r^2} = 0 \quad (3.1)$$

Die Lösung von Gleichung (3.1) besteht aus zwei Anteilen, die als Potential- und als Starrkörperwirbel bezeichnet werden. Beim Starrkörperwirbel wächst die Geschwindigkeit linear mit dem Radius, während sie beim Potenzialwirbel mit wachsendem Radius hyperbelartig abnimmt.

$$U_\varphi(r) = \frac{a}{r} + \omega r \quad (3.2)$$

Der reine Potenzialwirbel tritt in realen Strömungen nicht auf, da die Tangentialgeschwindigkeit an der Symmetrieachse nicht unendlich anwachsen kann, sondern vielmehr verschwinden muss. Starrkörperwirbel können aber beispielsweise bei der laminaren

Strömung durch um ihre Längsachse rotierende Rohre erzeugt werden. Die Kombination beider Wirbelformen wird als Rankine-Wirbel (3.3) bezeichnet. Der Ort der maximalen Tangentialgeschwindigkeit kennzeichnet beim Rankine-Wirbel den Übergang vom Starrkörper- zum Potenzialwirbel.

$$U_\varphi = U_1 \left(\frac{r}{r_1} \right)^{-m} \quad \text{mit} \quad \begin{cases} m = -1 & \text{für } 0 \leq r \leq r_1 \\ 0 \leq m \leq 1 & \text{für } r > r_1 \end{cases} \quad (3.3)$$

Beim Burgers-Oseen Wirbel (3.4) wird der unstetige Übergang durch einen stetigen Übergang beider Wirbelformen ersetzt und entspricht damit eher den Gegebenheiten realer Strömungen.

$$U_\varphi = \frac{\Gamma_0}{r} \left(1 - e^{-\left(\frac{r}{r_1}\right)^2} \right) \quad (3.4)$$

Beide Tangentialgeschwindigkeitsverteilungen sind in Bild 3.1 beispielhaft dargestellt.

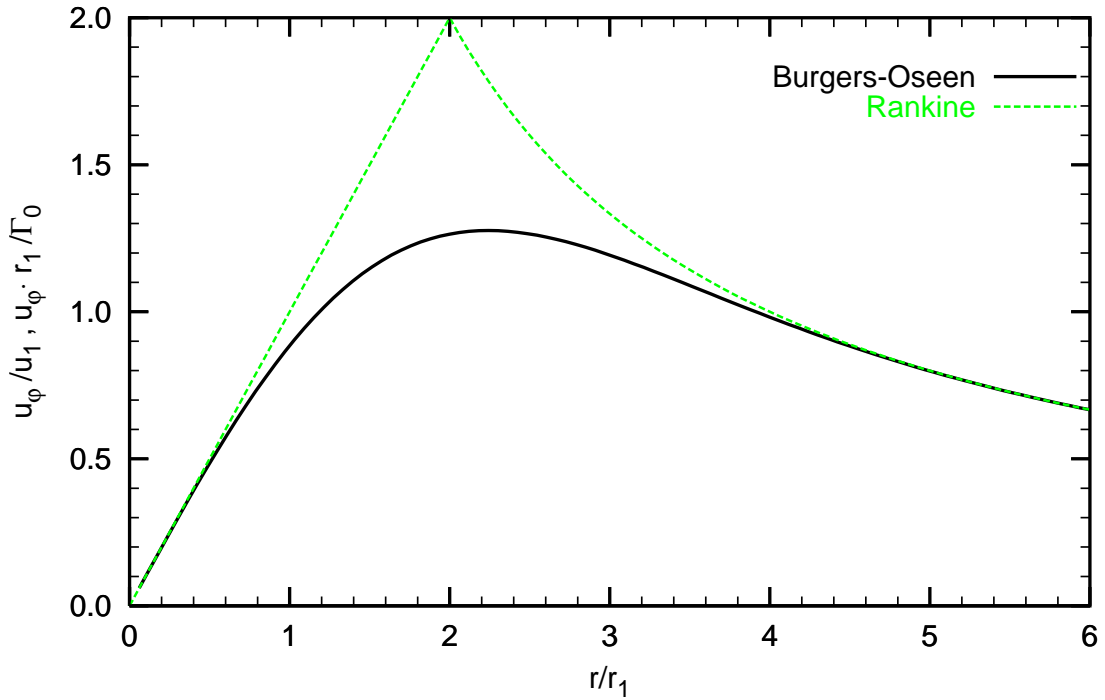


Bild 3.1: Tangentialgeschwindigkeitsverteilungen verschiedener Wirbelformen

3.2 Das Axialgeschwindigkeitsfeld

Das Tangentialgeschwindigkeitsfeld drallbehafteter Strömungen hat Auswirkungen auf das Axialgeschwindigkeitsfeld. Betrachtet man eine stationäre, rotationssymmetrische Strö-

mung in Zylinderkoordinaten, vereinfacht sich die Impulserhaltungsgleichung der Radialkomponente auf die Form

$$\frac{U_\varphi^2}{r} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} \quad (3.5)$$

Aus Gleichung (3.5) wird ersichtlich, dass es durch die Wirkung der Zentrifugalkraft zu einem in radialer Richtung positiven Druckgradienten mit einem Druckminimum auf der Symmetrieachse kommt. Mit zunehmender Lauflänge nimmt die Tangentialgeschwindigkeit bei eingeschlossenen Strömungen wie beispielsweise einer drallbehafteten Rohrrinnenströmung aufgrund von Wandreibungseffekten ab und der Druck in Axialrichtung steigt wieder an⁹. Ist die anfängliche Tangentialgeschwindigkeit groß genug, kann die Axialströmung den sich ergebenden Druckgradienten nicht mehr überwinden und es kommt in Achsnähe zu einer plötzlichen Umkehrung der Strömungsrichtung. Dieses Phänomen wird auch als *vortex breakdown* bezeichnet. Die Ausbildung der Rezirkulationszone ist ein charakteristisches Merkmal stark verdrahter Strömungen.

3.3 Die Drallzahl

In technischen Anwendungsfällen hat sich die Drallzahl S als dimensionslose Kennzahl zur Beschreibung drallbehafteter Strömungen etabliert. Sie ist als das Verhältnis des Drehimpulsstroms \dot{D} zum mit dem charakteristischen Radius R und dem Axialimpulsstrom \dot{I} gebildeten Produkt definiert:

$$S = \frac{\dot{D}}{\dot{I}R} \quad \text{mit} \quad \dot{D} = 2\pi \int_0^\infty \rho(U_x U_\varphi) r^2 dr, \quad \text{und} \quad \dot{I} = 2\pi \int_0^\infty (p - p_\infty) \rho U_x^2 r dr \quad (3.6)$$

Die Drallzahl S ist ein Maß für den relativen Einfluss der Fliehkräfte auf das Strömungsfeld. Eine exakte Bestimmung der Drallzahl auf experimentellem Weg erfordert die Vermessung des Geschwindigkeitsfelds sowie des statischen Druckes. Deshalb wird in experimentellen Untersuchungen oft der Druckterm entweder vernachlässigt oder der Axialimpulsstrom \dot{I} ohne Druckbeitrag definiert. Dann ist die Drallzahl jedoch keine Erhaltungsgröße mehr. Weiterhin werden (in turbulenten Strömungen) die momentanen Geschwindigkeiten unter Vernachlässigung der turbulenten Geschwindigkeitsterme durch mittlere Geschwindigkeiten ersetzt. Schließlich werden oft vereinfachende Axial- und Tangentialgeschwindigkeitsverteilungen zur Bestimmung der Drallzahl angenommen.

⁹In freien Drallströmungen nimmt die Tangentialgeschwindigkeit durch Mischung mit unverdrallter Umgebung ebenfalls ab.

3.4 Taylor-Proudman Theorem

Das Taylor-Proudman Theorem sagt für den Grenzfall stark rotierender, stationärer und reibungsfreier Strömungen die Ausbildung eines zweidimensionalen Strömungszustands voraus. Die Geschwindigkeit in der Richtung parallel der Rotationsachse ändert sich nicht mehr. Beispielsweise würde sich bei einer Strömung durch ein um seine Längsachse rotierendes Rohr die Axialgeschwindigkeit nicht mehr ändern. In rotationssymmetrischen Strömungen ergibt sich ein eindimensionaler Strömungszustand, da die Strömungsgrößen auch nicht mehr winkelabhängig sind (wenn das Problem in Polarkoordinaten betrachtet wird). Die Geschwindigkeit ist nur noch eine Funktion des Radius.

3.5 Turbulenz und Drall

Das gleichzeitige Auftreten von Turbulenz und Drall führt zu einer wechselseitigen Beeinflussung beider Strömungsphänomene. Einerseits bewirkt Turbulenz in verdrehten Strömungen Veränderungen des mittleren Strömungsfelds, die in laminaren Strömungen so nicht zu beobachten sind. Die durch Drall oder Systemrotation hervorgerufenen zusätzlichen Volumenkräfte haben umgekehrt aber auch Einfluss auf die turbulenten Impuls- und Wärmeaustauschvorgänge. Beide Effekte werden im folgenden Abschnitt näher erläutert. Die geeignete Beschreibung ist Aufgabe der Turbulenzmodelle. In algebraischen Turbulenzmodellen ist dies im allgemeinen jedoch nicht der Fall, weshalb sie dort modelliert werden müssen. In Reynolds Spannungsmodellen und nichtlinearen Wirbelviskositätsmodellen kubischer Ordnung ist eine Modellierung nicht notwendig, wie Abschnitt 3.5.2 zeigen wird.

3.5.1 Wechselwirkungen zwischen Turbulenz und Drall

Die turbulente Strömung durch ein um seine Längsachse rotierendes Rohr zeigt anschaulich die Wirkung der Turbulenz auf das mittlere Strömungsfeld. In diesem von Speziale [52] ausführlich diskutierten und in Bild 3.2 skizzierten Fall wird der Strömung durch die Rotationsbewegung der äußeren Wand mit der mittleren Geschwindigkeit $U_\varphi = R\Omega$ um die z -Achse eine Tangentialgeschwindigkeitskomponente aufgeprägt. In laminaren Strömungen beobachtet man mit wachsendem Radius einen linearen Anstieg der Tangentialgeschwindigkeit U_φ . Die Geschwindigkeitsverteilung entspricht der eines Starrkörperwirbels. In turbulenten Strömungen stellt sich dagegen eine nichtlineare Geschwindigkeitsverteilung ein.

Die Ursache dieses Verhaltens lässt sich anhand der Reynolds gemittelten Impulserhaltungsgleichungen in Zylinderkoordinaten in einem mit der Winkelgeschwindigkeit Ω mitrotierenden Relativsystem (3.7)-(3.9) zeigen. Die Komponente $\overline{u'_r u'_\varphi}$ des Reynolds Span-

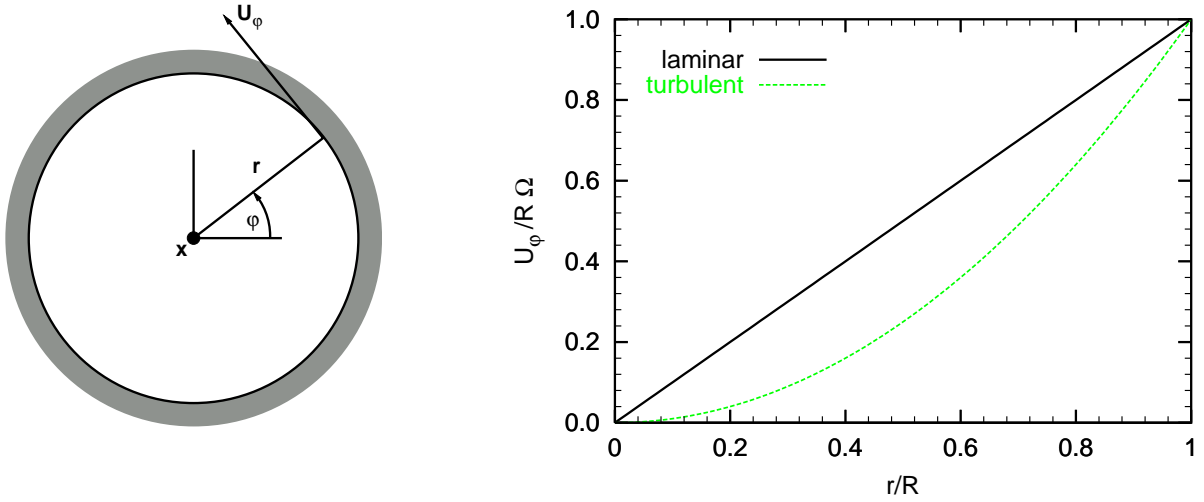


Bild 3.2: Strömung durch ein um seine Längsachse rotierendes Rohr

nungstensors in Gleichung (3.8) führt zu einer von Null verschiedenen Tangentialgeschwindigkeitskomponente im rotierenden Relativsystem und ruft damit die im Inertialsystem beobachtete nichtlineare Tangentialgeschwindigkeitsverteilung hervor. Zur besseren Unterscheidung sind die mittleren Strömungsgrößen im nicht rotierenden Inertialsystem in Großbuchstaben und die Strömungsgrößen im Relativsystem in den Gleichungen (3.7)-(3.9) in Kleinbuchstaben angegeben.

$$-\frac{\overline{u_\varphi^2}}{r} = -\frac{\partial p}{\partial r} - \frac{\partial \overline{u'_r u'_r}}{\partial r} - \frac{1}{r}(\overline{u'_r u'_r} - \overline{u'_\varphi u'_\varphi}) + 2\Omega \overline{u_\varphi} \quad (3.7)$$

$$0 = \nu(\nabla^2 \overline{u_\varphi} - \frac{\overline{u_\varphi}}{r^2}) - \frac{\partial \overline{u'_r u'_\varphi}}{\partial r} - \frac{2}{r} \overline{u'_r u'_\varphi} \quad (3.8)$$

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial x} + \nu \nabla^2 \overline{u_x} - \frac{\partial \overline{u'_r u'_x}}{\partial r} - \frac{1}{r} \overline{u'_r u'_x} \quad (3.9)$$

Umgekehrt hat aber auch das Auftreten zusätzlicher Volumenkräfte wie beispielsweise die Zentrifugalkraft in verdrehten Strömungen oder die Corioliskraft in rotierenden Strömungen Auswirkungen auf die turbulenten Austauschvorgänge. Durch sie können turbulente Schwankungsbewegungen entweder gedämpft oder auch verstärkt werden. Dieser Effekt kann mit Hilfe der exakten Produktionsterme des Reynolds Spannungstensors analysiert werden. Sie sind in vollständiger Form im Anhang (B.5) angegeben. Betrachtet man wieder die Strömung in einem um die Längsachse rotierenden Rohr, jedoch ohne Komponente in Hauptströmungsrichtung, ergibt sich eine eindimensionale Strömung ($U_x=0, U_r=0, U_\varphi \neq 0$) mit kreisförmigen Stromlinien. Die Produktionsterme des Reynolds Spannungstensors vereinfachen sich auf

$$P_{xx} = 0 \quad (3.10)$$

$$P_{rr} = +2\overline{u'_r u'_\varphi} \frac{U_\varphi}{r} \quad (3.11)$$

$$P_{\varphi\varphi} = -2\overline{u'_r u'_\varphi} \frac{\partial U_\varphi}{\partial r} \quad (3.12)$$

$$P_{r\varphi} = -\overline{u'_r u'_r} \frac{\partial U_\varphi}{\partial r} + \overline{u'_\varphi u'_\varphi} \frac{U_\varphi}{r} \quad (3.13)$$

$$P_{rx} = 0 \quad (3.14)$$

$$P_{\varphi x} = 0 \quad (3.15)$$

Die Variation der Umfangsgeschwindigkeit U_φ mit dem Radius r beeinflusst Größe und Vorzeichen der Produktionsterme der Reynolds Spannungskomponenten. Dies verdeutlicht Gleichung (3.16), in der die idealisierten Geschwindigkeitsverteilungen einer Festkörperrotation ($U_\varphi = \omega r$) und eines freien Wirbels ($U_\varphi = a/r$) eingesetzt wurden.

$$\begin{array}{ll}
 U_\varphi = \omega r & U_\varphi = a/r \\
 P_{r\varphi} = \omega(\overline{u'_\varphi u'_\varphi} - \overline{u'_r u'_r}) & P_{r\varphi} = a/r^2(\overline{u'_\varphi u'_\varphi} + \overline{u'_r u'_r}) \\
 P_{rr} = +2\omega\overline{u'_r u'_\varphi} & P_{rr} = +2a/r^2\overline{u'_r u'_\varphi} \\
 P_{\varphi\varphi} = -2\omega\overline{u'_r u'_\varphi} & P_{\varphi\varphi} = +2a/r^2\overline{u'_r u'_\varphi} \\
 (P_{\varphi\varphi} + P_{rr}) = 0 & (P_{\varphi\varphi} + P_{rr}) = +4a/r^2\overline{u'_r u'_\varphi}
 \end{array} \quad (3.16)$$

Der Fall einer Festkörperrotation führt zu einem abklingenden, isotropen Turbulenzzustand. Bei diesem Sonderfall verschwindet die Produktion turbulenter kinetischer Energie. Für den Fall $\overline{u'_\varphi u'_\varphi} > \overline{u'_r u'_r}$ kommt es zu einer positiven Produktion von $\overline{u'_r u'_\varphi}$. Sie führt wiederum zu einem negativen Beitrag zur Produktion $P_{\varphi\varphi}$ sowie zu einem positiven Beitrag der Produktionsrate P_{rr} . Der Unterschied zwischen den Komponenten $\overline{u'_\varphi u'_\varphi}$ und $\overline{u'_r u'_r}$ wird geringer und damit sinkt die Produktion von $P_{r\varphi}$. Der Fall einer mit dem Radius abnehmenden Tangentialgeschwindigkeit (freier Wirbel) zeigt dagegen eine gegenseitige Verstärkung der Produktion der Komponenten des Reynolds-Spannungstensors.

Allgemein gesprochen bewirkt die Zunahme der Geschwindigkeit mit dem Radius eine Schwächung der Turbulenz und eine Abnahme der Geschwindigkeit deren Verstärkung. Diese Zusammenhänge wurden unter anderem ausführlich anhand einer turbulenten Strömung in einem Ringraum zwischen zwei konzentrisch angeordneten Wellen untersucht [43]. Dabei kann durch die Rotation der inneren oder äußeren Welle um ihre Längsachsen der Strömung jede beliebige Tangentialgeschwindigkeitsverteilung aufgeprägt werden.

3.5.2 Berücksichtigung der Effekte in Turbulenzmodellen

Die im vorigen Abschnitt 3.5.1 diskutierten Wechselwirkungen zwischen Turbulenz und Drall werden nicht von allen Turbulenzmodellen gleichermaßen beschrieben. Sie werden allgemein mit differentiellen oder algebraischen Modellen kubischer Ordnung berücksichtigt, während lineare und quadratische algebraische Modelle zunächst nicht dazu in der Lage sind. Durch geeignete Modellierung kann jedoch auch für solche Modelle die Berücksichtigung der Wirkung der Stromlinienkrümmung erreicht werden. Das unterschiedliche Verhalten der Turbulenzmodelle wird im Folgenden anhand von zwei illustrativen Beispielen verdeutlicht.

Die Analyse der turbulenten Strömung durch ein axial rotierendes Rohr [52] dient als Beispiel für die Berücksichtigung der Auswirkung der Turbulenz auf eine verdrehte Strömung. Wie bereits erwähnt, ist in diesem Fall die Scherspannungskomponente $\overline{u'_r u'_\varphi}$ des Reynolds Spannungstensors für die rotationsabhängige Tangentialgeschwindigkeitsverteilung verantwortlich. Das Geschwindigkeitsfeld dieser Strömung lässt sich mit Hilfe des Verzerrungsgeschwindigkeits- und des absoluten Wirbeltensors (siehe auch Gleichung (A.9)) in Zylinderkoordinaten (B.3), (B.4) folgendermaßen ausdrücken:

$$S_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \frac{\partial U_x}{\partial r} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} \frac{\partial U_x}{\partial r} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad W_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & -\Omega & \frac{1}{2} \frac{\partial U_x}{\partial r} \\ \Omega & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} \frac{\partial U_x}{\partial r} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.17)$$

Bestimmung des Reynolds-Spannungstensors Algebraische Turbulenzmodelle verwenden wie in Kapitel 2.4 beschrieben den Verzerrungsgeschwindigkeits- und den Wirbeltensor zur Bestimmung der Komponenten des Reynolds-Spannungstensors. Lineare Wirbelviskositätsmodelle verwenden die Boussinesq Beziehung (2.41). Einsetzen der Geschwindigkeitstensoren aus Gleichung (3.17) in die Bestimmungsgleichung des Reynolds-Spannungstensors (2.41) ergibt für die Scherspannungskomponente

$$\overline{u'_r u'_\varphi} = -2\nu_t S_{r\varphi} = 0 \quad (3.18)$$

Deswegen können lineare (aber auch quadratische) Wirbelviskositätsmodelle die experimentell zu beobachtende Tangentialgeschwindigkeit $\overline{u_\varphi}$ im rotierenden Relativsystem nicht berechnen, wie das Einsetzen von (3.18) in (3.8) verdeutlicht. Erst nichtlineare Wirbelviskositätsmodelle dritter Ordnung sind aufgrund der kubischen Operatoren $W^2 S + S W^2$ und $W^2 S - S W^2$ dazu in der Lage.

Reynolds-Spannungsmodelle lösen dagegen eine eigene Transportgleichung für die Kom-

ponente $\overline{u'_r u'_\varphi}$. Unter Vernachlässigung viskoser Effekte vereinfacht sich diese Transportgleichung auf die Form:

$$\frac{C_1 \epsilon}{2k} \overline{u'_r u'_\varphi} = \Pi_{r\varphi}^{(r)} - \frac{\partial C_{r\varphi k}}{\partial x_k} - 2\Omega(\overline{u'_r u'_r} - \overline{u'_\varphi u'_\varphi}) \quad (3.19)$$

Wegen der in Rohrströmungen herrschenden Anisotropie der Turbulenz führt der Coriolis-term in Gleichung¹⁰ (3.19) zu einem von Null verschiedenen Wert von $\overline{u'_r u'_\varphi}$. Selbst im Falle isotroper Turbulenz ($\overline{u'_r u'_r} = \overline{u'_\varphi u'_\varphi}$) liefert der Druck-Scher-Korrelationsterm $\Pi_{r\varphi}^{(r)}$ einen Beitrag.

Bestimmung der Produktionsrate der turbulenten kinetischen Energie Ein weiteres Beispiel der Wechselwirkung zwischen Turbulenz und Drall ist die ebenfalls im vorigen Abschnitt beschriebene stabilisierende oder destabilisierende Wirkung zusätzlicher Volumenkräfte auf die Turbulenz. Dies lässt sich anhand der exakten Produktionsterme der Komponenten des Reynolds-Spannungstensors nachvollziehen (vgl. Gleichung (3.16)). Da Reynolds Spannungsmodelle die exakten Produktionsterme der Komponenten des Reynolds Spannungstensors lösen, werden die durch Stromlinienkrümmung verursachten Veränderungen in turbulenten Strömungen durch Reynolds-Spannungsmodelle korrekt beschrieben.

Algebraische Turbulenzmodelle lösen den Produktionsterm der turbulenten kinetischen Energie, in dem wiederum die Boussinesq Beziehung zur Bestimmung der turbulenten Reynolds Spannungskomponenten eingesetzt wird. Bei linearen Wirbelviskositätsmodellen ergibt sich unter den oben genannten Vereinfachungen hierfür eine Produktionsrate der Form

$$P_k = \nu_t \left(\frac{\partial U_\varphi}{\partial r} - \frac{U_\varphi}{r} \right)^2 = \begin{cases} 0, & U_\varphi = \omega r \\ 4\nu_t \left(\frac{a}{r^2} \right)^2, & U_\varphi = \frac{a}{r} \end{cases} \quad (3.20)$$

Beim Einsetzen der Geschwindigkeitsverteilung einer Festkörperrotation¹¹ ($U_\varphi = \omega r$) in Gleichung (3.20) verschwindet der Produktionsterm P_k , während er im Fall des freien Wirbels ($U_\varphi = \frac{a}{r}$) bestehen bleibt. Somit sollten auch lineare Wirbelviskositätsmodelle in der Lage sein, den turbulenzdämpfenden Effekt der Stromlinienkrümmung qualitativ richtig vorherzusagen [33].

¹⁰Letzter Term auf der rechten Seite von Gleichung (3.19)

¹¹die näherungsweise der Strömung entlang einer konvex gekrümmten Wand entspricht

Dies steht jedoch im Widerspruch zu Berechnungsergebnissen turbulenter Strömungen in gekrümmten Kanälen, bei denen lineare Wirbelviskositätsmodelle nicht in der Lage sind, die beschriebenen Interaktionen wiederzugeben. Dies liegt daran, dass in Strömungen mit starker Stromlinienkrümmung Geschwindigkeitsgradienten in Strömungsrichtung auftreten, die einen Beitrag zur Produktion turbulenter kinetischer Energie liefern. Wegen der bei drallbehafteten Strömungen gerechtfertigten Annahme der Rotationssymmetrie entfällt aus Gleichung (3.20) ein weiterer Term, der die Änderung der Geschwindigkeit mit dem Winkel beschreibt.

$$P_k = \nu_t \left(\frac{\partial U_\varphi}{\partial r} - \frac{U_\varphi}{r} \right)^2 + 4\nu_t \left(\frac{1}{r} \frac{\partial U_\varphi}{\partial \varphi} \right)^2 \quad (3.21)$$

Der zweite Term der vollständigen Gleichung der Produktionsrate turbulenter kinetischer Energie (3.21) liefert unabhängig von Beschleunigung oder Verzögerung der Strömung einen positiven Beitrag zur Produktion turbulenter kinetischer Energie und führt dazu, dass lineare algebraische Turbulenzmodelle die turbulenzdämpfenden und turbulenzanfachen Effekte in Strömungen durch gekrümmte Kanäle nicht korrekt berechnen können.

4 Numerisches Verfahren

In diesem Kapitel wird das für diese Arbeit verwendete numerische Verfahren vorgestellt und auf einige Besonderheiten hingewiesen. Für umfassendere Informationen zum verwendeten Verfahren kann die Programmdokumentation [2] herangezogen werden. Einen sehr guten allgemeinen Überblick bieten die Bücher von Ferziger und Perić [14] und Schäfer [47]. Zur Strömungsberechnung wurde das kommerzielle Programmpaket CFX-TASCflow in der Version 2.11 benutzt. Dabei handelt es sich um ein Verfahren zur Lösung der Erhaltungsgleichungen für Masse, Impuls und Energie auf dreidimensionalen, blockstrukturierten, nicht versetzten Gittern mit einer elementbasierten Finiten Volumen Methode. Die Erhaltungsgleichungen für Masse und Impuls werden gekoppelt gelöst. Zusätzliche skalare Transportgleichungen wie die der Energie (Temperatur) oder die der turbulenten Größen werden im Anschluss gelöst.

4.1 Diskretisierung der Geometrie

Die in Kapitel 2.3.3 vorgestellten gemittelten Bilanzgleichungen für Masse, Impuls und gegebenenfalls Energie werden nur an bestimmten, vorher zu definierenden diskreten Punkten im Strömungsgebiet berechnet. Das interessierende Gebiet wird daher in eine endliche Zahl von Gitterpunkten aufgeteilt. Jeden der Gitterpunkte umgibt ein raumfestes Kontrollvolumen, an dem die Bilanzgleichungen aufgestellt und gelöst werden.

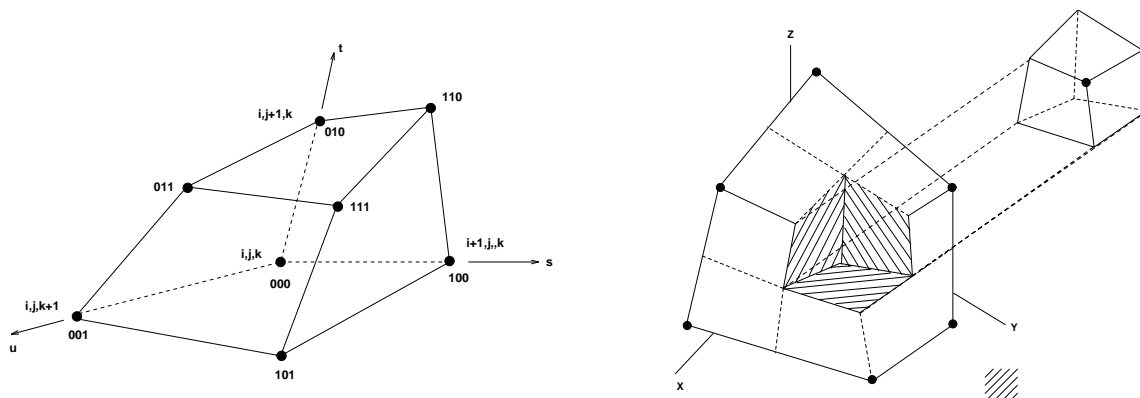


Bild 4.1: Hexaederelement bestehend aus 8 Oktanten (aus [2])

Die Kontrollvolumen werden aus Hexaederelemente konstruiert. Im dreidimensionalen Fall bilden je 8 Gitterpunkte ein Hexaederelement, das in Bild 4.1 links dargestellt ist. Jeder Hexaeder enthält wiederum die in Bild 4.1 rechts angedeuteten 8 Würfelemente bzw. „Oktanten“. Die Würfelemente ergeben sich aus der Teilung des Hexaeders jeweils in der Mitte zwischen zwei benachbarten Gitterpunkten. Die Verteilung der Hexaeder ist geordnet. Man spricht von einem strukturierten Gitter. Zusammen mit der kartesischen Behandlung der gesuchten Strömungsgrößen wird so ein streng konservativer Ansatz realisiert. Durch die Anordnung der Kontrollvolumina ist jede Grenzfläche gleichzeitig Aus-

und Eintrittsrand für die jeweilige Strömungsgröße. Die Hexaederelemente sind aber nicht die Kontrollvolumina. Ein Kontrollvolumen wird aus den acht Oktanten gebildet, die jeden Gitterpunkt umgeben. In Bild 4.1 rechts ist beispielhaft ein Gitterpunkt mit einem zugehörigen Würfelement herausgestellt. Die schraffierten Flächen sind Begrenzungsflächen des Kontrollvolumens. Nach Verwendung des Gauß'schen Integralsatzes können die Erhaltungsgleichungen über das raumfeste Kontrollvolumen integriert werden. Oberflächenintegrale repräsentieren die Flüsse der gesuchten Erhaltungsgrößen über die Grenzen des Kontrollvolumens. Volumenintegrale beschreiben Quell- oder Senkenterme der Veränderlichen. Am Gitterpunkt als Mittelpunkt eines Kontrollvolumens (siehe auch Bild 4.2) werden bei der von CFX-TASCflow benutzten nicht versetzten Anordnung alle Variablen berechnet und deren Werte gespeichert. Dafür müssen die kontinuierlichen Differentialgleichungen diskretisiert werden.

4.2 Diskretisierung der Bilanzgleichungen

Die Diskretisierung approximiert die kontinuierlichen Differentialgleichungen durch ein algebraisches Gleichungssystem. Die Bilanzgleichung einer beliebigen generischen Strömungsgröße ϕ an einem ortsfesten Kontrollvolumen hat die Form

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho \phi dV + \iint_A \rho u_j \phi dn_j = \iint_A \Gamma_{eff} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_j} \right) dn_j + \iiint_V S_\phi dV \quad (4.1)$$

Ausgehend von dieser Bilanzgleichung (4.1) werden nachfolgend die Diskretisierungsansätze der einzelnen Gleichungsterme näher erläutert. Unterschiede ergeben sich aufgrund der unterschiedlichen mathematischen Struktur und vor allem wegen der physikalischen Bedeutung der einzelnen Terme.

4.2.1 Diskretisierung des transienten Terms

Der transiente Term kann entweder durch ein implizites Euler Verfahren erster oder zweiter Ordnung approximiert werden:

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho \phi dV \approx \begin{cases} \rho V \frac{1}{\Delta t} (\phi^n - \phi^{n-1}) \\ \rho V \frac{1}{\Delta t} \frac{1}{2} (3\phi^n - 4\phi^{n-1} + \phi^{n-2}) \end{cases} \quad (4.2)$$

In (4.2) bezeichnet ϕ^{n-1} den Wert der Variable zum vorangegangenen Zeitpunkt. Der Vorteil des impliziten Verfahrens ist die Stabilität unabhängig vom gewählten Zeitschritt.

Der Term hat keinen Einfluss auf das Ergebnis der konvergenten Lösung stationärer Strömungen.

4.2.2 Diskretisierung des diffusiven Terms

Der im diffusiven Term vorhandene Gradient der Größe ϕ wird gemäß der Finiten Element basierten Methode aus den Gradienten der Formfunktionen N_n des betrachteten Elements berechnet:

$$\iint_A \Gamma_{eff} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_j} \right) dn_j \approx \sum_{ip} \left(\Gamma_{eff} \Delta n_j \sum_n \frac{\partial N_n}{\partial x_j} \phi_n \right)_{ip} \quad (4.3)$$

Das Verfahren ist für orthogonale Elemente von zweiter Ordnung und für nicht orthogonale Elemente von erster Ordnung genau.

4.2.3 Diskretisierung des konvektiven Terms

Bei der Diskretisierung des konvektiven Terms wird der Wert der gesuchten Variablen ϕ_{ip} an der Integrationsstützstelle (siehe Bild 4.2) benötigt:

$$\iint_A \rho u_j \phi dn_j \approx \sum_{ip} (\rho u_j \Delta n_j)_{ip}^o \phi_{ip} \quad (4.4)$$

Der Wert ϕ_{ip} im Integrationsstützpunkt wird durch Interpolation der Variablen aus benachbarten Gitterpunkten konstruiert. Bei den Interpolationsverfahren ist der physikalische Transportmechanismus von Interesse, da sonst numerische Schwierigkeiten auftreten können. Die bei CFX-TASCflow verfügbaren Interpolationsverfahren sind nachfolgend aufgeführt. Bild 4.2 verdeutlicht die für die Interpolation verwendete Kompassnotation anhand eines zweidimensionalen Kontrollvolumens.

Aufwindverfahren. Beim „Upwind Differencing Scheme“ (UDS) wird der stromab liegende Nachbarwert bei der Bestimmung von ϕ_e vernachlässigt:

$$\phi_e = \begin{cases} \phi_P, & \dot{m}_e > 0 \\ \phi_E, & \dot{m}_e < 0 \end{cases} \quad (4.5)$$

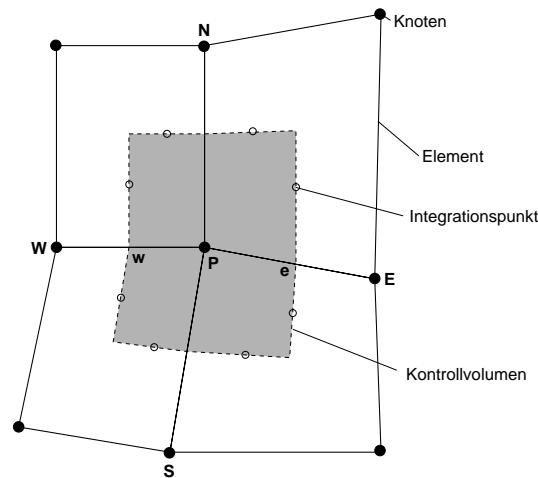


Bild 4.2: Kontrollvolumen und Notation im zweidimensionalen Fall

Das Aufwindverfahren liefert durch die Berücksichtigung der Strömungsrichtung physikalisch richtige Ergebnisse. Es ist von erster Ordnung genau und führt bei schnell variierenden Strömungsgrößen durch sog. „künstliche Diffusion“ zu verschmierten Gradienten von ϕ [14].

Lineares Verfahren. Beim „Central Differencing Scheme“ (CDS) wird zur Bestimmung von ϕ_e eine lineare Interpolation der Nachbarwerte vorgenommen. Da bei den hier verwendeten Rechengittern der Punkt „e“ immer in der Mitte zwischen den Gitterpunkten „P“ und „E“ zu liegen kommt, entspricht dieses Verfahren einer arithmetischen Mittelwertbildung.

$$\phi_e = \phi_E \lambda_e + \phi_P (1 - \lambda_e), \quad \lambda_e = \frac{x_e - x_P}{x_E - x_P} = 0,5 \text{ (hier)} \Rightarrow \phi_e = 0,5(\phi_E + \phi_P) \quad (4.6)$$

Das CDS ist von zweiter Ordnung genau, kann aber durch die Nichtberücksichtigung der Richtung der Konvektionsgeschwindigkeit zu unphysikalischen Lösungen führen.

Hybridverfahren. Diese Verfahren kombinieren Aufwind mit linearen Verfahren, um physikalisch richtige Approximationen (des UDS) mit einer höheren Genauigkeit (des CDS) zu erzielen.

$$\phi_e = \phi_P + \Delta\phi_e \quad \text{mit} \quad \Delta\phi_e \approx \frac{x_E - x_P}{2} \frac{\partial\phi}{\partial x} \Big|_e \quad (4.7)$$

Der im Hybridansatz (4.7) vorkommende Gradient von ϕ wird durch eine allgemeine Kombination von Aufwind-, Abwind- und Zentraldifferenzenapproximation ersetzt.

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_e \approx a \left[\frac{\phi_P - \phi_W}{x_E - x_P} \right] + b \left[\frac{\phi_E - \phi_P}{x_E - x_P} \right] + (1 - a - b) \left[\frac{\phi_{EE} - \phi_E}{x_E - x_P} \right] \quad (4.8)$$

Durch Setzen der in Gleichung (4.8) vorkommenden Parameter a und b lassen sich Verfahren wie beispielsweise das SOU oder das QUICK Schema konstruieren (4.9). Alle besprochenen Verfahren sind in Tabelle 4.1 zusammengefasst.

$$\phi_e \approx \begin{cases} \frac{3}{2}\phi_P - \frac{1}{2}\phi_W & a = 1,0 \quad b = 0,0 \quad (\text{SOU}) \\ \frac{3}{4}\phi_P - \frac{1}{8}\phi_W + \frac{3}{8}\phi_E & a = 0,25 \quad b = 0,75 \quad (\text{QUICK}) \end{cases} \quad (4.9)$$

Sowohl das SOU als auch das QUICK Verfahren stellen gegenüber dem reinen CDS Schema Verbesserungen dar. Dennoch sind durch die feste Gewichtung der Nachbarknoten unphysikalische Einflüsse möglich und können zu Konvergenzproblemen führen.

Schema	Ordnung	ϕ_e	a	b
UDS	1	ϕ_P	0,0	0,0
CDS	2	$\frac{1}{2}\phi_P + \frac{1}{2}\phi_E$	0,0	1,0
SOU	2	$\frac{3}{2}\phi_P - \frac{1}{2}\phi_W$	1,0	0,0
QUICK	2	$\frac{3}{4}\phi_P - \frac{1}{8}\phi_W + \frac{3}{8}\phi_E$	0,25	0,75

Tabelle 4.1: Diskretisierungsverfahren

Zur Vermeidung unphysikalischer Einflüsse kann zur Bestimmung von $\Delta\phi_e$ in Gleichung (4.7) statt der in Gleichung (4.8) gezeigten mathematisch begründeten allgemeinen Approximation der Ableitung $\partial\phi/\partial x$ ein physikalisch motivierter Ansatz verwendet werden. Der Ansatz wird als PAC Verfahren („Physical Advection Correction“) bezeichnet [2]. Grundlage ist eine konvektionsdominierte Transportgleichung für ϕ , bei der Diffusion gegenüber Konvektion und Quelltermen vernachlässigt wird. Die Bewegungsgleichung (4.10) lässt sich in kartesischen Koordinaten $\langle x, y, z \rangle$, aber auch in einem stromliniengebundenen Koordinatensystem $\langle n, s \rangle$ betrachten.

$$\rho u \frac{\partial \phi}{\partial x} + \rho v \frac{\partial \phi}{\partial y} + \rho w \frac{\partial \phi}{\partial z} = \rho \vec{U} \frac{\partial \phi}{\partial s} = \dot{S}^\phi \quad (4.10)$$

Aus der kartesischen Gleichung (4.10) ergibt sich durch Umformung die für Gleichung (4.7) benötigte Approximation von $\Delta\phi_e$, die allgemein als PAC bezeichnet wird.

$$\Delta\phi_e = \frac{x_E - x_P}{2} \frac{1}{\rho u} \left(\dot{S}^\phi - \rho v \frac{\partial \phi}{\partial y} - \rho w \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \quad (4.11)$$

Zur Bestimmung von $\Delta\phi_e$ in Gleichung (4.11) müssen die noch vorhandenen kontinuierlichen Terme durch diskrete Operatoren ersetzt werden. Dazu werden allgemein die Variablenwerte an den benachbarten Knotenpunkten herangezogen. Bei der Verwendung dieser Technik für mehrdimensionale Strömungsprobleme zeigten sich allerdings numerische Probleme, die auf die schnelle Veränderung der Konvektionsanteile in (4.11) zurückzuführen sind [2]. Wird bei der Ableitung die stromliniengebundene Variante der Transportgleichung (4.10) benutzt, lassen sich die Konvektionsterme vermeiden. Diese Technik erfordert die Interpolation entlang von Stromlinien und wird als SUDS („Skew Upwind Differencing Scheme“) Verfahren bezeichnet, da die Interpolation nicht entlang von Gitterlinien erfolgt. Wie in Bild 4.3 angedeutet, wird die Stromlinie durch den Integrationsstützpunkt konstruiert. Der gesuchte Wert ϕ_e an der Integrationsstelle ergibt sich dann gemäß (4.12) aus dem Wert ϕ_u stromauf am Schnittpunkt u der Stromlinie mit der Elementgrenze sowie der PAC Korrektur, die die Veränderung von ϕ auf dem Weg l zwischen u und der Integrationsstützstelle bei e berücksichtigt.

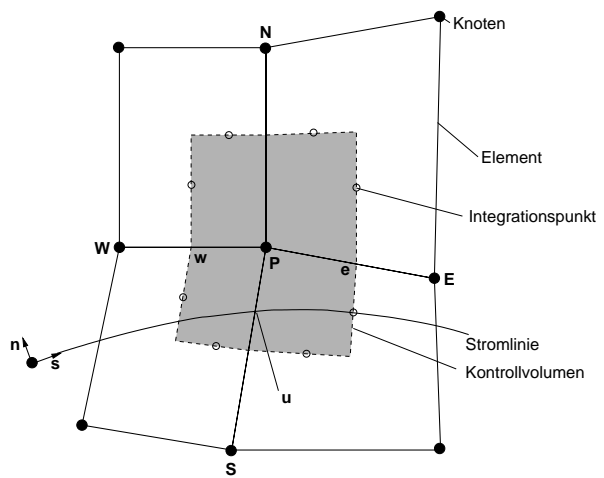


Bild 4.3: Kontrollvolumen mit Stromlinie

$$\phi_e \approx \phi_u + \Delta\phi_e, \quad \Delta\phi_e \approx l \frac{\partial \phi}{\partial s} = \frac{l}{\rho \vec{U}} \dot{S}^\phi \quad (4.12)$$

Der Wert ϕ_u in Gleichung (4.12) wird entweder linear aus den Nachbarknotenwerten interpoliert („LP-SUDS“) oder zusätzlich massenstromgewichtet linear interpoliert („MW-SUDS“). Das lineare Verfahren ist formal zweiter Ordnung genau im Raum, das massenstromgewichtete Verfahren von erster Ordnung.

Zur Diskretisierung des Konvektionsterms wird für die in Kapitel 5 vorgestellten Berechnungen das SUDS Verfahren verwendet.

4.2.4 Diskretisierung des Quellterms

Der Quellterm in (4.1) wird unter der Annahme diskretisiert, dass der Wert des Quellterms im Mittelpunkt des Kontrollvolumens den Mittelwert von S über das Kontrollvolumen darstellt.

$$\iiint_V S_\phi dV \approx \bar{S}_\phi V \quad (4.13)$$

Das Verfahren ist von zweiter Ordnung genau im Raum und für konstante und linear variierende Werte des Quellterms exakt [14]. Hängt der Quellterm S_ϕ von der Variablen ϕ ab, wird der diskretisierte Quellterm gemäß der von Patankar [39] vorgeschlagenen Linearisierung (4.14) in einen von ϕ unabhängigen und einen abhängigen Anteil aufgeteilt. Ist die Abhängigkeit in ϕ nichtlinear, erfolgt eine Linearisierung zur Stabilisierung des Verfahrens.

$$\bar{S}_\phi = S_c + S_a \phi_P \quad (4.14)$$

Damit sind alle Terme der Transportgleichung einer beliebigen skalaren Größe ϕ diskretisiert. Zur Berechnung des Strömungsfelds ist aber vor allem die Diskretisierung und Berechnung der Erhaltungsgleichungen von Masse und Impuls notwendig, um Werte für die in der skalaren Transportgleichung enthaltenen Druck- und Geschwindigkeitsfelder zu erhalten. Insbesondere für inkompressible Strömungen ergeben sich Besonderheiten, die nachfolgend skizziert werden.

4.3 Entkopplung von Druck und Geschwindigkeit inkompressibler Strömungen

Zur Berechnung des Druck- und Geschwindigkeitsfelds werden die Massen- und Impulserhaltungsgleichungen benutzt. Bei inkompressiblen Strömungen ergibt sich die Besonderheit der Entkopplung von Massen- und Impulserhaltungsgleichungen [14]. Für die vier Unbekannten u, v, w und p stehen formal vier Erhaltungsgleichungen zur Verfügung. Der Druck ist aber nicht in der dafür vorgesehenen Kontinuitätsgleichung enthalten, sondern tritt als Gradient in den Impulserhaltungsgleichungen auf. Die in der Kontinuitätsgleichung vorkommende Dichte ist im Grenzfall inkompressibler Strömung entweder gar keine gesuchte Größe (da sie konstant und bekannt ist) oder wird mit Hilfe einer thermischen Zustandsgleichung berechnet. Die Entkopplung von Massen- und Impulserhaltungsgleichungen führt in der Regel zum Auftreten oszillierender Druckfelder.

Die Entkoppelung von Druck und Geschwindigkeit kann vermieden werden, indem die Kontinuitäts- und die Impulsgleichungen auf zueinander verschobenen Rechengittern berechnet werden. Das Vorgehen wird aber für komplexere Geometrien zunehmend schwierig. Diese und weitere Techniken sind in der Literatur [14, 47] näher erläutert. In CFX-TASCflow wird zur Vermeidung der Entkoppelung von Druck und Geschwindigkeit auf nicht versetzten Gittern eine von Rhie und Chow [42] vorgeschlagene Methode der selektiven Interpolation genutzt. Dabei werden durch Interpolation die Konvektionsgeschwindigkeiten an den Kontrollvolumenrändern so bestimmt, dass zusätzlich zu den Geschwindigkeitswerten der Nachbarknoten auch die lokalen Druckgradienten eine Rolle spielen. Das Verfahren ist in [2, 6, 47] ausführlich beschrieben.

4.4 Berechnung des algebraischen Gleichungssystems

Durch Summation der diskreten Terme an einem beliebigen Kontrollvolumen um den Gitterpunkt P entsteht eine algebraische Gleichung (4.15), die den Wert der Variablen ϕ_P mit den Werten an den Nachbarknotenpunkten nb in Beziehung setzt und die Bilanzgleichungen an einem Kontrollvolumen in diskreter Form darstellt.

$$A_P \phi_P + \sum_{nb} A_{nb} \phi_{nb} = b_P \quad (4.15)$$

Summation über alle Gitterpunkte des Berechnungsgebiets ergibt das zu lösende algebraische Gleichungssystem, das als Folge der Impulserhaltungsgleichungen nichtlinear ist. Die Koeffizienten der Matrix A hängen noch von der Variablen ϕ ab. Das Gesamtsystem in Matrizenform kann wie folgt geschrieben werden.

$$A\phi = b \quad (4.16)$$

Zur Lösung muss wegen der Nichtlinearität ein iteratives Lösungsverfahren verwendet werden. Ausgehend von einer geschätzten Lösung ϕ werden die Koeffizienten der Matrix A in Gleichung (4.16) berechnet. Mit der nun bekannten Matrix A ist das Gleichungssystem linearisiert und kann gelöst werden. Die berechneten Werte ϕ^k werden im nächsten Iterationsschritt $k + 1$ zur Linearisierung der Koeffizientenmatrix A genutzt.

Zur Lösung des linearen Gleichungssystems wird das Verfahren der unvollständigen LU Zerlegung (ILU) verwendet. Die Systemmatrix A wird durch zwei Teilmatrizen approximiert. Die untere Dreiecksmatrix L und eine obere Dreiecksmatrix U . Mit dem Ansatz

$A \approx LU$ entsteht ein Gleichungssystem, das analog zum vollständigen LU-Verfahren¹² $A=LU$ durch kombiniertes Vorwärts- und Rückwärtseinsetzen direkt gelöst werden kann. Ausführlichere Informationen sind beispielsweise in [2, 14, 47] zu finden. Das ILU Verfahren besitzt gute Konvergenz- und Robustheitseigenschaften [47]. Der Gesamtrechenaufwand steigt aber mit wachsender Knotenzahl überproportional an. Zur Verringerung des Rechenaufwands wird ein Mehrgitterverfahren eingesetzt. Die Rechenzeit steigt nur noch proportional mit der Zahl der Gitterpunkte. Das Prinzip der Mehrgitterverfahren beruht auf der Beobachtung, dass iterative Lösungsverfahren Fehlerkomponenten der Näherungslösung nur lokal, d.h. in der Größenordnung der Gitterweite effizient beseitigen. Globale („langwellige“) Fehlerkomponenten bleiben dagegen erhalten. Mehrgitterverfahren nutzen unterschiedlich grobe Gitter, um Fehlerkomponenten unterschiedlicher Wellenlängen gleichermaßen gut beseitigen zu können. Nach Berechnung einer Näherungslösung auf einem feinen Gitter wird ein gröberes Gitter konstruiert und mit Hilfe der Feingitterlösung eine Grobgitterlösung bestimmt. CFX-TASCflow nutzt ein algebraisches Mehrgitterverfahren (AMG) zur Konvergenzbeschleunigung. Im Gegensatz zum geometrischen Mehrgitterverfahren, das zur Grobgitterkonstruktion nur geometrische Informationen (wie die Gitterweite) benutzt und aufwändigere Methoden zur Gleichungslösung erfordert, wird beim algebraischen Mehrgitterverfahren das gröbere Gitter aus der Stärke der Koeffizienten der Systemmatrix A auf dem feineren Gitter abgeleitet.

4.5 Implementierung der Turbulenzmodelle

Bei der Verwendung linearer Wirbelviskositätsmodelle erfolgt die Implementierung der jeweiligen Turbulenzmodelle durch Einsetzen des linearen Boussinesq-Ansatzes (2.41) in die Reynolds-gemittelten Impulserhaltungsgleichungen (2.28). Dabei wird die im Boussinesq-Ansatz gegebene Proportionalität der Reynolds-Spannungen zum Deformationsgeschwindigkeitstensor S_{ij} dem diffusiven Term der Bilanzgleichung zugeordnet. Der verbleibende isotrope Teil der Reynolds-Spannungen ($\frac{2}{3}k\delta_{ij}$) wird zusammen mit dem Druck diskretisiert. Der in der Bilanzgleichung (4.18) auftretende Druck \bar{P} ist die Summe des realen Druckes \bar{p} sowie des isotropen Anteils der Reynolds-Spannungen:

$$\bar{P} = \bar{p} + \frac{2}{3}k \quad (4.17)$$

Die Wirkung linearer Wirbelviskositätsmodelle in Reynolds-gemittelten Navier-Stokes Gleichungen besteht demnach im Grunde nur in einer im diffusiven Term auftretenden erhöhten so genannten effektiven Viskosität. Die Erhöhung der Viskosität begünstigt die Stabilität des numerischen Verfahrens. Das Fehlen der turbulenten Wirbelviskosität

¹²entspricht der Gauß-Elimination

in Reynolds-Spannungsmodellen gilt als ein Hauptgrund für die verringerte numerische Stabilität dieser Modellklasse.

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} [2 \underbrace{(\nu + \nu_t)}_{\nu_{eff}} S_{ij}] \quad (4.18)$$

Bei der Implementierung nichtlinearer Wirbelviskositätsmodelle gelingt diese einfache Formulierung aus Gleichung (4.18) nicht mehr ohne weiteres. Ausgangspunkt ist eine Aufspaltung der allgemeinen konstitutiven Gleichung (2.40) in den linearen und nichtlinearen Anteil, der in Gleichung (4.19) als HOT_{ij} bezeichnet ist.

$$\overline{u'_i u'_j} = \frac{2}{3} k \delta_{ij} - 2\nu_t S_{ij} + (HOT)_{ij} \quad (4.19)$$

Das nun zu diskretisierende System der Impulserhaltungsgleichungen ergibt sich durch Einsetzen von Gleichung (4.19) in die RANS Gleichungen (2.28).

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} [2\nu_{eff} S_{ij} + (HOT)_{ij}] \quad (4.20)$$

Durch die Zuordnung des linearen Anteils von Gleichung (4.20) zur linken Seite des algebraischen Gleichungssystems (4.16) als Teil der Koeffizientenmatrix A wird eine implizite Behandlung erreicht. Der nichtlineare Anteil wird hingegen explizit der rechten Seite von (4.16) zugeordnet. Bei einer impliziten Verarbeitung kann es aufgrund der Nichtlinearität zur Schwächung der Diagonaldominanz der Koeffizientenmatrix A kommen und damit das Konvergenzverhalten des numerischen Verfahrens empfindlich gestört werden. Aber auch die explizite Behandlung der nichtlinearen Terme erfordert zumindest bei kubischen Modellen wie dem in Abschnitt 2.4.7 vorgestellten Turbulenzmodell zusätzliche Maßnahmen zur Stabilisierung des numerischen Verfahrens. Ausgangspunkt ist eine von Craft et al. [8] vorgeschlagene Zusammenfassung von Teilen der kubischen Terme der konstitutiven Modellgleichung mit dem linearen Term der Gleichung (2.68).

$$\overline{u'_i u'_j} = \frac{2}{3} k \delta_{ij} - \left[2\nu_t - 8\nu_t \frac{k^2}{\epsilon^2} (c_6 S_{kl} S_{kl} + c_7 W_{kl} W_{kl}) \right] S_{ij} + \dots \quad (4.21)$$

Mit dieser Umgruppierung kann eine modifizierte Wirbelviskosität definiert werden, die die Diagonaldominanz der Koeffizientenmatrix A erhöht und damit das Verfahren stabilisiert, wenn die kubischen Anteile einen negativen Beitrag liefern.

$$\nu'_t = \nu_t - 4\nu_t \frac{k^2}{\epsilon^2} \min[(c_6 S_{kl} S_{kl} + c_7 W_{kl} W_{kl}), 0] \quad (4.22)$$

Bei der Implementierung nichtlinearer Turbulenzmodelle sind neben den Anpassungen bei den gemittelten Impulserhaltungsgleichungen noch weitere Modifikationen notwendig. Neben den offensichtlichen Modifikationen wie den möglichen Anpassungen bei der Berechnung des linearen Modellkoeffizienten C_μ und der Wirbelviskosität ν_t ist noch die Anpassung bei der Berechnung der Produktion der turbulenten kinetischen Energie zu berücksichtigen, die ja, wie aus der Transportgleichung der turbulenten kinetischen Energie (2.36) ersichtlich, auf den Reynolds-Spannungstensor zurückgreift.

4.6 Verifikation

Zur Überprüfung der Implementierung werden die ausgewählten Turbulenzmodelle zur Berechnung einfacher, modellhafter Strömungen herangezogen. Dabei handelt es sich um das in Abschnitt 2.4.5 vorgestellte quasi-lineare Wirbelviskositätsmodell von Pettersson-Reif et al. [41] sowie um das in Abschnitt 2.4.7 beschriebene nichtlineare Wirbelviskositätsmodell dritter Ordnung von Craft et al. [8]. Dies geschieht anhand der turbulenten Strömung entlang einer ebenen Platte sowie der turbulenten Strömung durch einen Kanal mit quadratischem Strömungsquerschnitt. Der zweite Testfall dient primär der Überprüfung der vorzeichengerechten Implementierung der nichtlinearen Terme des kubischen Wirbelviskositätsmodells. Bei dieser Strömung kommt es aufgrund von Turbulenzanisotropien zur Ausbildung von Sekundärströmungen. Zur korrekten Erfassung der Sekundärströmung sind zumindest nichtlineare Turbulenzmodelle zweiter Ordnung notwendig.

Während bei der Berechnung der turbulenten Strömung entlang einer ebenen Platte, deren Ergebnisse in Kapitel 5.1 zusammengefasst sind, erwartungsgemäß keine Besonderheiten hinsichtlich der Ergebnisse zu verzeichnen waren, kam es bei der Berechnung der turbulenten Strömung durch einen Kanal mit quadratischem Strömungsquerschnitt zu Auffälligkeiten. Es zeigte sich, dass mit dem im Rahmen der Arbeit neu implementierten kubischen Modell von Craft et al. [8] keine qualitativ korrekte Berechnung der Sekundärströmung möglich war. Eine intensive Analyse, die im Anhang C dokumentiert ist, ergab, dass weniger die Implementierung als vielmehr die Kalibration der Modellkoeffizienten für das Verhalten des Turbulenzmodells verantwortlich ist. Die gleiche Strömung wurde mit Hilfe des in Abschnitt 2.4.6 beschriebenen expliziten algebraischen Reynolds-Spannungsmodells zweiter Ordnung korrekt bestimmt.

Angesichts dieses Umstandes, der gegen ein Defizit der Implementierung spricht, aber stattdessen weitere Schwierigkeiten bei der Berechnung anderer Strömungen erwarten lässt, wird auf eine weitere Verwendung dieses Modells für die Arbeit verzichtet.

4.7 Fehleranalyse bei CFD Rechnungen

Bei allen numerischen Strömungssimulationen treten eine Reihe von Unsicherheiten auf, die im Rahmen einer Fehleranalyse identifiziert und zum Teil auch quantifiziert werden können. Die Klassifizierung der Unsicherheiten in quantifizierbare und nicht quantifizierbare Fehler ist für eine Fehlerabschätzung hilfreich. Die nicht abschätzbaren konzeptionellen Fehler werden in Abschnitt 4.7.1 vorgestellt. Die quantifizierbaren Fehler sind unter den Oberbegriff numerische Fehler zusammengefasst und in Abschnitt 4.7.2 näher vorgestellt. Eine umfassende Beschreibung der möglichen Fehler bei CFD Rechnungen ist bei Ferziger und Perić [14] zu finden. Abschließend werden in Abschnitt 4.7.3 die bei CFD Rechnungen auftretenden quantifizierbaren Fehlerarten exemplarisch an der in Kapitel 5.3 beschriebenen Drallströmung in einer Brennkammergeometrie abgeschätzt und gezeigt, dass die numerischen Unsicherheiten unter bestimmten Voraussetzungen vernachlässigbar sind.

4.7.1 Konzeptionelle Fehler

Zu den konzeptionellen Fehlern zählen die *Modellfehler* sowie die *Benutzerfehler*. Unter Modellfehler versteht man den Unterschied zwischen der tatsächlichen Strömung und der exakten Lösung der mathematischen Gleichungen. Modellfehler treten bei praktisch allen numerischen Strömungssimulationen technisch relevanter Strömungen auf. Die Ursache ist, dass zur Durchführung von Strömungssimulationen praktisch immer vereinfachende Annahmen notwendig sind. Sehr häufig müssen vereinfachende bzw. idealisierende Annahmen über die Problemgeometrie vorgenommen werden. Weitere Annahmen betreffen beispielsweise die unterstellten Stoffwerte des betrachteten Fluids oder vereinfachende Randbedingungen. In diese Kategorie fällt zum Beispiel die Anwendung des logarithmischen Wandgesetzes zur Modellierung turbulenter Grenzschichten. Die Geschwindigkeitsverteilung in unmittelbarer Wandnähe gilt so nur für die Grenzschicht der turbulenten Strömung entlang einer ebenen Wand ohne Druckgradienten. Diese Randbedingungen sind für technisch interessierende Strömungen de facto nie erfüllt. Ähnliches gilt für die Anwendung von Turbulenzmodellen. Da turbulente Strömungen für technisch relevante Fälle nicht direkt berechnet werden können, müssen Turbulenzmodelle eingesetzt werden. Die Herleitung der Modelle ist immer mit mehr oder weniger stark ausgeprägten heuristischen Annahmen verbunden, die bei der Anwendung der Modelle ebenfalls in aller Regel nicht erfüllt sind.

Der Benutzerfehler lässt sich als Unterschied zwischen der iterativen Lösung des algebraischen Gleichungssystems und der tatsächlich (vom Benutzer) erzeugten iterativen Lösung definieren. Darunter zählen Programmierfehler, unzutreffende Randbedingungen, die Verwendung schlechter numerischer Gitter oder die Wahl falscher Parameter.

4.7.2 Numerische Fehler

Zu den numerischen Fehlern zählen der *Diskretisierungsfehler* sowie der *Iterationsfehler*. Der Diskretisierungsfehler ergibt sich als der Unterschied zwischen der exakten Lösung der mathematischen Gleichungen und der exakten Lösung der diskreten Approximation. Dieser Fehler entsteht durch die Überführung der kontinuierlichen Differentialgleichungen in ein algebraisches Gleichungssystem, das zudem an diskreten Punkten im Problemgebiet gelöst wird. Der Diskretisierungsfehler kann quantifiziert werden, indem das Strömungsproblem auf drei konsistent verfeinerten Gittern berechnet wird und die Werte einer mit diesen Gittern berechneten interessierenden Strömungsgröße miteinander verglichen werden.

$$\epsilon_h \cong \frac{\phi_{h_1} - \phi_{h_2}}{r^p - 1} \quad (4.23)$$

In Gleichung (4.23) bezeichnet ϕ die interessierende Strömungsgröße, r der Verfeinerungsfaktor der Gitter mit den mittleren Gitterweiten h_1 und h_2 sowie p die Fehlerreduktion bei der Gitterverfeinerung.

$$r = \frac{h_2}{h_1}, \quad p = \frac{\ln(\frac{\phi_{h_2} - \phi_{h_3}}{\phi_{h_1} - \phi_{h_2}})}{\ln(r)} \quad (4.24)$$

Wird beispielsweise ein Gitter in eine Koordinatenrichtung verdoppelt¹³ ($r=2$) und halbiert sich dabei der numerische Fehler, hat man ein Verfahren mit der Ordnung $p=1$. Gemäß Gleichung (4.23) kann man den Diskretisierungsfehler vernachlässigen, wenn sich der Wert der betrachteten Größe auf zwei unterschiedlich groben Gittern nicht mehr ändert.

Der Iterationsfehler bezeichnet den Unterschied zwischen der exakten und der iterativen Lösung des diskreten Gleichungssystems. Da direkte Lösungsmethoden zu aufwändig sind, kommen iterative Lösungsmethoden zum Einsatz, die an einem definierten Zeitpunkt abgebrochen werden müssen. Der nach k Iterationen vorhandene Fehler ϵ^k lässt sich gemäß Gleichung quantifizieren [14].

$$\epsilon^k \cong \frac{\|\phi^{k+1} - \phi^k\|}{\lambda_1 - 1}, \quad \lambda_1 = \frac{\|\phi^{k+1} - \phi^k\|}{\|\phi^k - \phi^{k-1}\|} \quad (4.25)$$

Die Anwendung der Gleichung (4.25) ist für praktische Zwecke nicht gut geeignet, da der Eigenwert der Iterationsmatrix λ_1 oft komplex ist, Gleichung (4.25) aber für reale

¹³Bei dreidimensionalen Strömungen ist eine verachtfachung der Kontrollvolumina nötig

Eigenwerte gilt. Der Iterationsfehler kann alternativ auch mit Hilfe des Residuenverlaufs abgeschätzt werden. Das Residuum r^k nach k Iterationen kommt zustande, weil die Lösung ϕ^k des algebraischen Gleichungssystems die exakte Lösung ϕ aus Gleichung (4.16) nicht genau erfüllt.

$$A\phi^k = b - r^k \quad (4.26)$$

Da gemäß Gleichung (4.27) der Residuen- und Iterationsfehlerverlauf direkt zusammenhängen, ist der Iterationsfehler um vier Größenordnungen gefallen, sobald das Residuum r^k um dieselbe Größenordnung gefallen ist. Durch Setzen eines entsprechenden Konvergenzkriteriums kann der Iterationsfehler auskonvergierter Lösungen vernachlässigt werden.

$$A\epsilon^k = r^k \quad (4.27)$$

Im Zuge einer sorgfältigen Fehleranalyse ist es demnach möglich, den numerischen Fehler zu quantifizieren und gegebenenfalls zu vernachlässigen. Dies wird nachfolgend exemplarisch anhand der im Ergebnisteil vorgestellten Drallströmung in einer Brennkammergeometrie gezeigt.

4.7.3 Fehleranalyse der Drallströmung in einer Brennkammergeometrie

Am Beispiel der in Kapitel 5.3 ausführlich vorgestellten Drallströmung in einer Brennkammergeometrie werden die numerischen Fehler der Strömungssimulation quantifiziert. Dabei handelt es sich um die im vorigen Abschnitt erläuterten Diskretisierungs- und den Iterationsfehler.

Gemäß Gleichung (4.23) ergibt sich der Diskretisierungsfehler aus dem Wertevergleich einer Strömungsgröße, die auf unterschiedlich feinen numerischen Gittern berechnet wurde. Zuvor muss noch die Ordnung des Verfahrens mit Hilfe von Gleichung (4.24) bestimmt werden. Zu diesem Zweck wird die Strömung auf drei konsistent verfeinerten Gittern berechnet. Ausgehend von einer Basisdiskretisierung von $50 \times 52 \times 3$ Elementen wird das jeweils feinere Gitter mit Hilfe eines Verfeinerungsfaktors von $r = 1,5$ erzeugt. Die in Kapitel 3.3 eingeführte Drallzahl S dient dabei als Referenzgröße. Sie wird mittels Gleichung (4.28) berechnet.

$$S_0 = \frac{2\pi \int_0^R \rho(UW + \overline{uw})r^2 dr}{2\pi \int_0^R \rho(U^2 + \overline{u^2})r dr R} \quad (4.28)$$

Tabelle 4.2 zeigt in einer Übersicht die Werte der auf den drei sukzessive verfeinerten Gittern berechneten Drallzahlen sowie die Ordnung des Verfahrens und insbesondere den damit berechneten Diskretisierungsfehler ϵ_h . Anhand dieser Tabelle wird deutlich, dass der Diskretisierungsfehler in diesem Fall zu vernachlässigen ist.

Gitter	r	S_0	p	ϵ_h
1	–	0,3871	–	–
2	1,5	0,3858	–	–
3	1,5	0,3852	2,2	0,00038

Tabelle 4.2: Diskretisierungsfehler der berechneten Drallströmung

Wie im vorigen Abschnitt gesehen, ist der Iterationsfehler vernachlässigbar, wenn das Konvergenzkriterium konservativ gesetzt wird. Zur Überprüfung des Einflusses des Konvergenzkriteriums auf das berechnete Strömungsfeld wird die Drallströmung mit den drei in Gleichung (4.29) dargestellten Abbruchkriterien berechnet und die sich ergebenden Axialgeschwindigkeitsverteilungen miteinander verglichen.

$$\begin{aligned}
 r_{max}^n &\leq 10^{-3} \\
 r_{max}^n &\leq 10^{-4} \\
 r_{max}^n &\leq 10^{-5}
 \end{aligned}
 \tag{4.29}$$

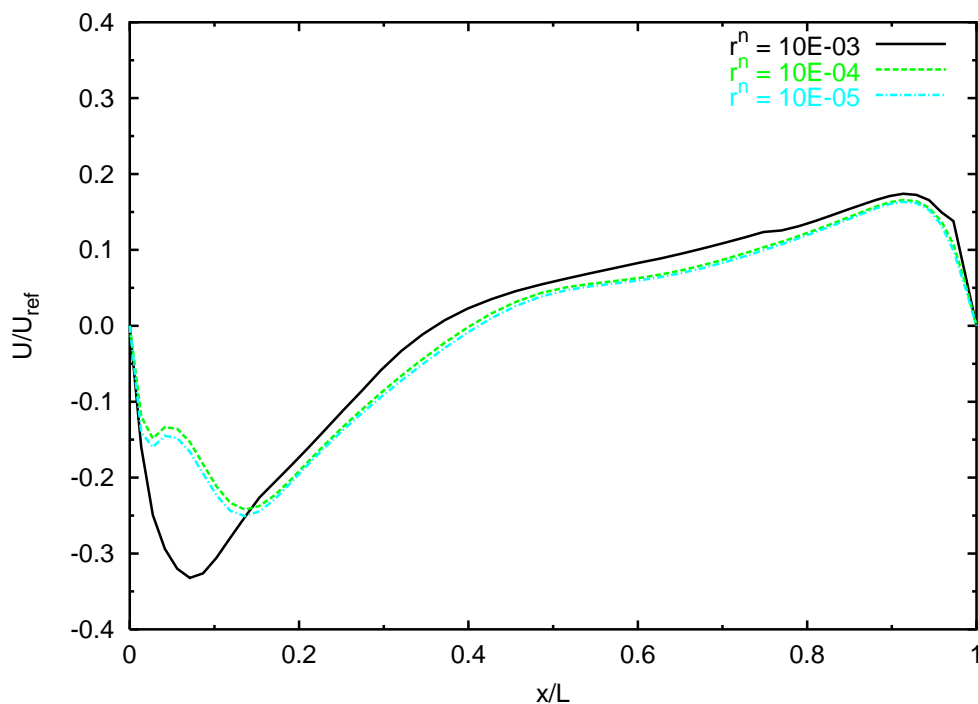


Bild 4.4: Einfluss des Abbruchkriteriums auf den Axialgeschwindigkeitsverlauf

Aus dem Vergleich der drei in Bild 4.4 dargestellten Axialgeschwindigkeitsverteilungen wird deutlich, dass das gewählte Abbruchkriterium $r_{max}^n \leq 10^{-4}$ ausreichend konservativ gesetzt ist. Eine weitere Verringerung des maximalen Residuums bringt bezüglich der Axialgeschwindigkeitsverteilung keine nennenswerte Änderung mehr.

5 Ergebnisse

Zur Analyse des sehr komplexen Strömungsgeschehens in Brennkammern werden die diesen Anwendungsfall kennzeichnenden Strömungsformen identifiziert und untersucht. Die für das Strömungs- und Mischungsverhalten entscheidenden Faktoren sind die Strahleinblasung von Sekundärluft in den Primärmassenstrom sowie die Verdrallung des Primärmassenstroms. Speziell die Berechnung verdrallter Strömungen stellt aufgrund der in Kapitel 3 beschriebenen Wechselwirkungen von Turbulenz und Drall bis heute hohe Anforderungen an die eingesetzten Turbulenzmodelle sowohl bezüglich ihrer Genauigkeit, aber auch insbesondere im Hinblick auf ihre Robustheit. Zur genaueren Analyse des Einflusses der betrachteten Turbulenzmodelle auf die berechneten Strömungsfelder werden daher die beiden für diesen Fall charakteristischen Strömungsformen getrennt voneinander berechnet und die erzielten Ergebnisse vorgestellt.

Zu Beginn des Kapitels wird in Abschnitt 5.1 zunächst die Berechnung der turbulenten Grenzschicht entlang einer ebenen Platte vorgestellt. Dieser Testfall dient als Referenzfall zur Verifikation der verwendeten bzw. implementierten Turbulenzmodelle. Die Berechnungsergebnisse werden mit gut vermessenen und dokumentierten Experimenten verglichen, um eine möglichst fundierte Einschätzung der Leistungsfähigkeit der Turbulenzmodelle zu gewährleisten. Der Fall der Strahleinblasung in eine Querströmung wird in Abschnitt 5.2 vorgestellt und diskutiert. Die Berechnung und Bewertung einer drallbehafteten Strömung erfolgt in Abschnitt 5.3. Abschließend wird die Berechnung der Strahlreiheneinblasung in eine verdrallte Querströmung in Abschnitt 5.4 dargestellt.

Bei der Vorstellung der Berechnungsergebnisse werden nicht alle in Abschnitt 2.4 und A beschriebenen Turbulenzmodelle berücksichtigt. Dies liegt an numerischen Schwierigkeiten, die beim Einsatz der Modelle auftraten. Dazu zählen das in Abschnitt 2.4.7 beschriebene neu implementierte Modell von Craft et al. [8] sowie das in Abschnitt A beschriebene Modell von Speziale, Sarkar und Gatski [51].

5.1 Grenzschicht der ebenen Platte

Die turbulente Grenzschicht der längs angeströmten ebenen Platte ohne Druckgradienten ist eine starke Vereinfachung technisch interessierender Strömungen. Dieser Strömungstyp wird aber gerade deshalb oft zur Verifikation von Turbulenzmodellen herangezogen, da analytische oder empirische Vergleichsmöglichkeiten ableitbar sind. Die Platte erfährt einen Widerstand, der mit Hilfe des lokalen Widerstandsbeiwerts c_f ausgedrückt werden kann.

$$c_f = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2} = 0.018 Re_{\delta_2}^{-\frac{1}{6}}, \quad \delta_2 = \int_0^\infty \frac{u}{U_\infty} \left[1 - \frac{u}{U_\infty} \right] dy \quad (5.1)$$

Der Zusammenhang in Gleichung (5.1) gilt nach [53] und zeigt, wie der lokale Widerstandsbeiwert in Abhängigkeit der mit der Impulsverlustdicke δ_2 gebildeten Reynolds-Zahl Re_{δ_2} sinkt.

5.1.1 Versuchsaufbau und Diskretisierung

Die hier betrachtete Strömung entlang einer ebenen Platte wurde von Smith et al. [12] experimentell untersucht und als Testfall zur Validierung von Large-Eddy Simulationen aufgenommen [15]. Die Messungen wurden in einem offenen Windkanal mit rechteckigem Strömungsquerschnitt durchgeführt. Die Hauptabmessungen des Kanals sind: $5,8\text{ m} \times 1,22\text{ m} \times 0,15\text{ m}$ (Länge \times Breite \times Höhe).

Das Arbeitsmedium war Luft unter Umgebungsbedingungen. Die Strömung gelangte durch eine Düse mit einem Kontraktionsverhältnis von 6:1 in die Messstrecke. Zuvor wurde sie durch einen Strömungsgleichrichter sowie eine Beruhigungskammer der Länge $0,91\text{ m}$ geleitet. Die der Messwand gegenüberliegende Wand war leicht konturiert, um einen Druckgradienten in Strömungsrichtung von annähernd Null zu erzeugen. Die mittlere Anströmgeschwindigkeit beträgt $U_m = 33\text{ m/s}$, der Turbulenzgrad liegt bei etwa $Tu = 0,01$ ¹⁴. Angaben über die Dissipationsrate ϵ fehlen. Messungen der mittleren Größen erfolgten mit Hilfe der Hitzdrahtanemometrie an 10 Punkten in Strömungsrichtung, turbulente Messungen wurden an 2 Punkten durchgeführt.

Für die Berechnungen wurde ein Gebiet mit den Hauptabmessungen $10\text{ m} \times 0,1\text{ m} \times 2\text{ m}$ (Länge \times Breite \times Höhe) angenommen. Wegen der angenommenen Zweidimensionalität der Strömung wurde nicht die gesamte Breite des Kanals berücksichtigt, sondern für diese Richtung Symmetrie vorausgesetzt. Dieses Gebiet wurde mit $200 \times 3 \times 100$ Elementen diskretisiert.

Die verwendeten Randbedingungen sind Einlass, Auslass, freier Rand, Symmetrie und Wand. Am Einlass wurden konstante Werte für die mittleren Geschwindigkeiten und die turbulenten Größen vorgeschrieben. Die Haftbedingung an der Wand wurde mit Standard Wandfunktionen bzw. mit der in CFX-TASCflow verfügbaren Option eines festen Wandabstands modelliert. Am Auslass wurde ein konstanter Druck von $p = 0\text{ Pa}$ vorgegeben. Bei dem der festen Wand gegenüber befindlichen freien Rand wird ebenfalls ein konstanter Druck von $p = 0\text{ Pa}$ vorgegeben, aber im Gegensatz zum Auslass ist dort prinzipiell der Einstrom von Fluid zulässig (= *opening*). Für die turbulenten Größen gelten dort die selben Werte wie für den Einlass. Für die Randbedingungen in Breitenrichtung wurden Symmetrierandbedingungen angesetzt.

¹⁴abgeschätzt aus den Freistromwerten der gemessenen Normalkomponente $\overline{u'u'}$

5.1.2 Darstellung der Ergebnisse

Bild 5.1 zeigt den Verlauf des lokalen Reibungsbeiwerts in Abhängigkeit der mit der Impulsverlustdicke δ_2 gebildeten Reynolds-Zahl Re_{δ_2} . Der Verlauf der experimentellen Werte bestätigt die Gültigkeit des in Gleichung (5.1) angegebenen Zusammenhangs. Die berechneten Verläufe des lokalen Reibungsbeiwerts stimmen ebenfalls gut mit den experimentellen Werten überein. Lediglich das quasi lineare Modell von Pettersson et al. [41] (als „QLM“ bezeichnet) berechnet durchgängig einen etwas zu hohen lokalen Widerstandsbeiwert. Der eigentliche Verlauf stimmt jedoch gut mit dem in Bild 5.1 als Korrelation bezeichneten Verlauf überein.

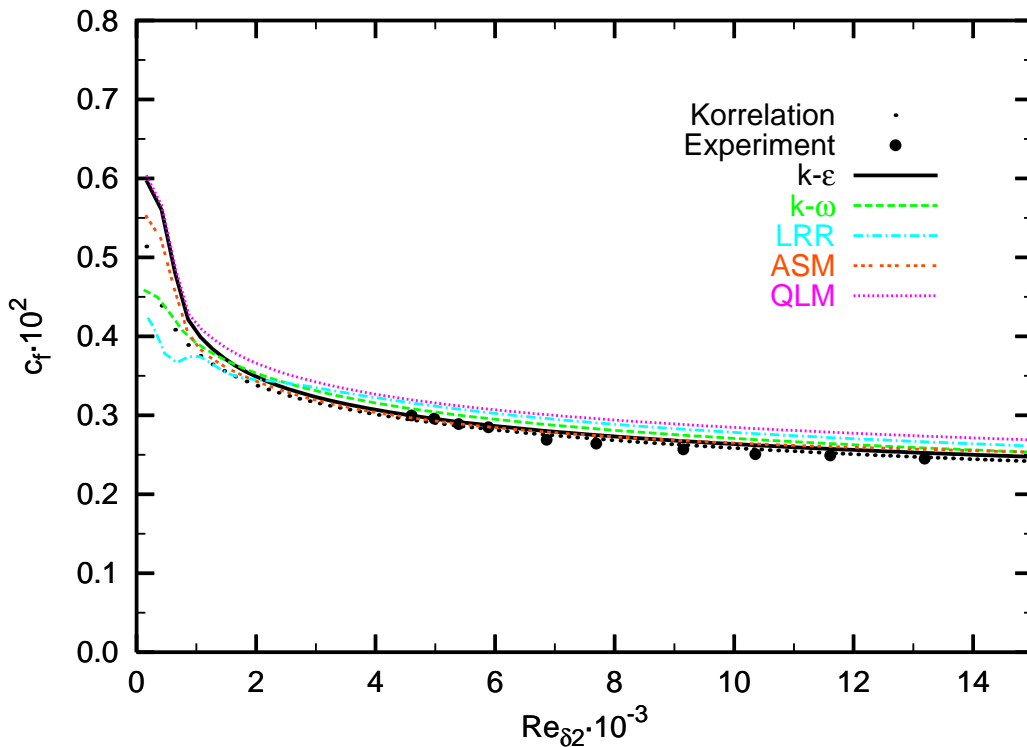


Bild 5.1: Lokaler Reibungsbeiwert c_f . Symbole: Exp.:•, Korr.:··· $k-\epsilon$:—, $k-\omega$:—, QLM:····, ASM:---, LRR:---.

Die sehr gute Übereinstimmung des $k-\epsilon$ Modells mit der Korrelation ist verständlich, da dieser Strömungstyp zur Kalibration der Modellkoeffizienten verwendet wurde. Umgekehrt könnten die unterschiedlichen Werte der linearen Modellkoeffizienten C_μ beim $k-\epsilon$ und beim QLM Modell von $C_\mu=0,09$ bzw. $C_\mu=0,21$ die leichten Abweichungen des QLM Modells erklären.

Bild 5.2 zeigt die dimensionslose Geschwindigkeitsverteilung in Abhängigkeit des dimensionslosen Wandabstands im Vergleich zum logarithmischen Wandgesetz. Durch die Verwendung der in CFX-TASCflow verfügbaren Option eines festen Wandabstands wird die Lage des wandnächsten Knotens bei $y^+=11,25$ erreicht. Die Übereinstimmung der berechneten Geschwindigkeitsverteilungen mit dem logarithmischen Wandgesetz ist in dessen

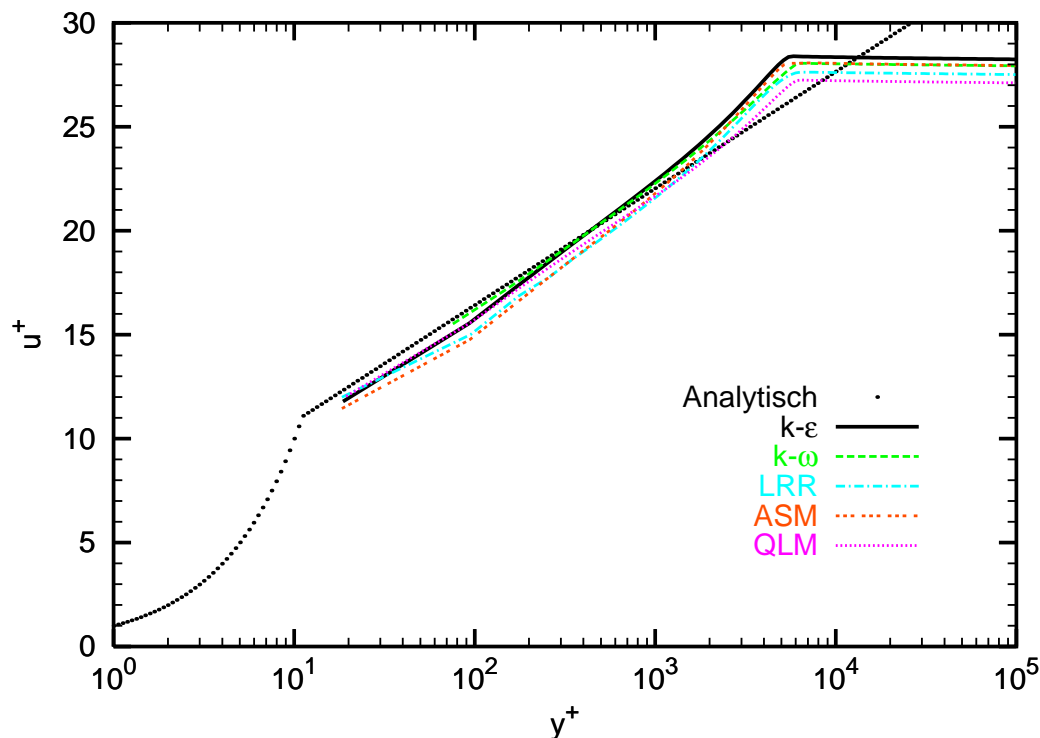


Bild 5.2: Dimensionslose Geschwindigkeitsverteilung u^+

Gültigkeitsbereich¹⁵ ($y^+ = 10^1 - 10^3$) gut. Die unterschiedlich hohen Niveaus der wandnormalen Geschwindigkeiten sind mit den Unterschieden der in Bild 5.1 dargestellten Reibungsbeiwerten (bzw. Wandschubspannungen) zu erklären.

5.2 Strahleinblasung in eine ebene Querströmung

Die Strahleinblasung tritt in einer Reihe von technischen Anwendungen auf. Abgesehen von dem hier interessierenden Fall wird die Strahleinblasung beispielsweise auch zur Kühlung von Turbinenschaufeln genutzt. Sie tritt auf bei Abgasstrahlen von Senkrechtstartern in der Startphase, bei Abgasstrahlen von Kaminen in die Atmosphäre oder der Einleitung von Abwasser in Flüsse. Aufgrund der vielfältigen Einsatzmöglichkeiten war diese Strömungsform bereits frühzeitig Gegenstand experimenteller und numerischer Untersuchungen, wie der Überblick von Margason [34] zu dieser Thematik belegt. Dabei standen oft entweder die Bestimmung des Strahleindringverhaltens in die Querströmung bzw. der Verlauf der Strahltrajektorie oder die Bestimmung des turbulenten Mischungsverhaltens von Strahl- und Hauptstromfluid im Vordergrund. Die Messungen von Andreopoulos [3] und Andreopoulos und Rodi [4] sind eine Ausnahme, da sie sowohl den turbulenten Impuls- als auch den turbulenten Wärme- bzw. Stoffaustausch berücksichtigen.

¹⁵Der Gültigkeitsbereich verschiebt sich in Abhängigkeit der Re -Zahl bis hin zu $y^+ = 10^3$. Dann erfolgt der Übergang zum Außengesetz.

Das Strahleindringverhalten und der Verlauf der Strahltrajektorie wird hauptsächlich von zwei Kenngrößen beeinflusst. Von der mit dem Durchmesser der Strahlzuführung als charakteristische Länge und der mittleren Hauptstromgeschwindigkeit gebildeten Reynolds-Zahl $Re = \frac{U_m D}{\nu}$ sowie vom Geschwindigkeitsverhältnis zwischen den mittleren Strahl- und Hauptstromgeschwindigkeiten $R = \frac{W_j}{U_m}$. Statt des Geschwindigkeitsverhältnisses R wird in manchen Untersuchungen auch das Impulsstromverhältnis von Neben- und Hauptstromfluid $I = \frac{\rho_j W_j^2}{\rho_m U_m^2}$ zur Charakterisierung des Strömungsgeschehens benutzt. Werden temperatur- und druckbedingte Variationen der Dichte vernachlässigt und die Mischung von Einstoffsystemen betrachtet, entspricht das Impulsverhältnis dem Quadrat des Geschwindigkeitsverhältnisses.

5.2.1 Versuchsaufbau und Diskretisierung

Das turbulente Strömungsfeld eines Strahls in einer Querströmung wurde für insgesamt drei verschiedene Geschwindigkeitsverhältnisse $R = \frac{W_j}{U_m}$ von Strahl- zu Hauptströmungsgeschwindigkeit von Andreopoulos und Rodi [4] mit Hilfe der Hitzdrahtanemometrie experimentell untersucht. Messungen des turbulenten Mischungsfelds der gleichen Konfiguration stammen von Andreopoulos [3]. Der experimentelle Aufbau ist in Abbildung 5.3 skizziert. Er befindet sich in einem geschlossenen Windkanal mit einem achteckigen Strömungsquerschnitt und einem mittleren Durchmesser von $1,5\text{ m}$ und einer Gesamtlänge der Testsektion von $L = 6\text{ m}$. In einem Abstand von $H = 0,28\text{ m}$ oberhalb des Windkanalbodens wurde eine ebene Platte installiert. In der Platte befindet sich eine Austrittsöffnung mit einem Durchmesser $D = 0,05\text{ m}$, durch die ein Strahl normal zur Windkanalhauptströmung mit einer mittleren Strahlgeschwindigkeit W_j eintritt. Das Fluid strömt zunächst durch eine Beruhigungskammer, an die sich eine Düse mit einem Kontraktionsverhältnis (Durchmesserverhältnis) von $4,2:1$ anschließt. Die Düse geht in ein gerades Messingrohr der Länge $L_R = 0,6\text{ m}$ über, durch das das gegenüber der Hauptstromtemperatur um 4 K auf $T = 304\text{ K}$ erwärmte Fluid strömt. Die Austrittsöffnung des Rohres befindet sich in einem Abstand von $0,5\text{ m}$ stromab des Bodenplattenanfangs.

Während der austretende Freistrahle durch die Queranströmung in Strömungsrichtung abgelenkt wird, tritt bei der Hauptströmung in Wandnähe eine Art Verblockungseffekt auf, wie er bei einem quer angeströmten Zylinder zu beobachten ist. Durch die Freistrahleumströmung wird die Hauptströmung seitlich abgelenkt und beschleunigt. Stromab der Einblasung bildet sich ein Rückströmgebiet aus, in das Teile des beschleunigten Hauptmassenstroms einfließen. Das rückströmende Fluid wird vom eindringenden Freistrahle angesaugt und abtransportiert. Bei den Untersuchungen wurde die Hauptstromgeschwindigkeit des Luftmassenstroms konstant auf $U_m = 13,9\text{ m/s}$ gehalten und die Nebenstromgeschwindigkeit in drei Messreihen so variiert, dass sich die Geschwindigkeitsverhältnisse $R = 0,5, 1, 2$ ergeben. Der Turbulenzgrad der freien Hauptströmung wird mit $Tu = 0,05$

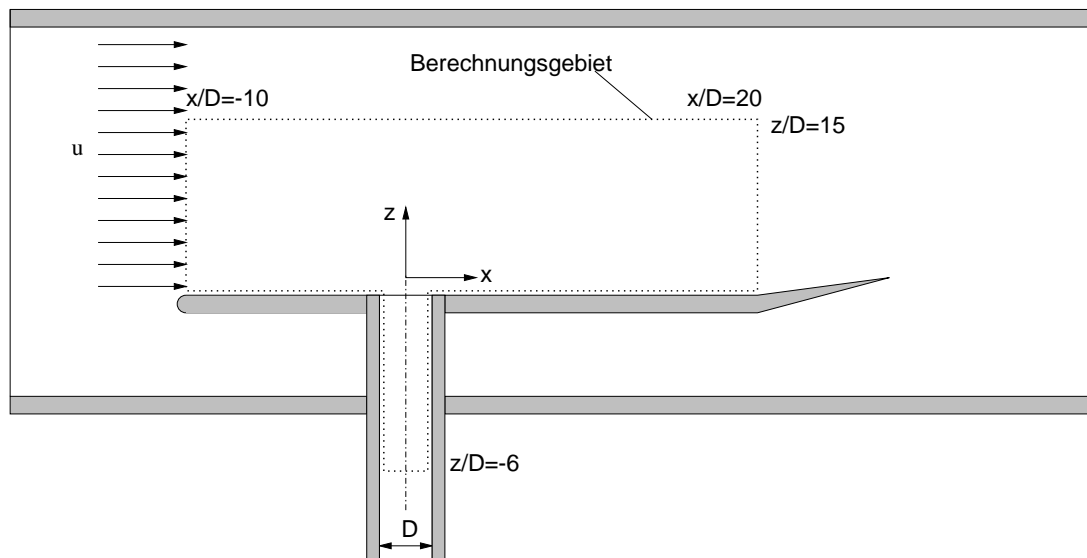


Bild 5.3: Strahl in Querströmung. Versuchsaufbau

angegeben. Er wurde ebenso wie die mittlere Geschwindigkeit $0,2\text{ m}$ stromauf (bzw. $0,3\text{ m}$ stromab der Plattenvorderkante) des Rohrendes bestimmt. Angaben zur Dissipationsrate bzw. zum turbulenten Längenmaß fehlen. Die Fluidtemperatur des Hauptstroms beträgt $T_{ref} = 300\text{ K}$, die Temperatur des Freistrahlfuids $T_j = 304\text{ K}$.

Das diskretisierte Gebiet beginnt in Hauptströmungsrichtung an der Vorderkante der Zwischenplatte bei $x/D = -10$ und endet stromab der Strahleinblasung bei $x/D = 20$. In Wandnormalenrichtung endet die Diskretisierung oberhalb der Bodenplatte bei $z/D = 15$. Die Erstreckung in Breitenrichtung beträgt $y/D = 5$, wobei aus Symmetriegründen lediglich der halbe Rohrquerschnitt berücksichtigt wurde. Die Diskretisierung des Rohrstücks endet in einem Abstand $z/D = -6$ stromauf des Strahleinblasungsorts. Die Diskretisierung besteht aus etwa 252.000 Knoten, die sich wie folgt aufteilen: $91 \times 52 \times 50$ Knoten für den Hauptkanal (Länge \times Breite \times Höhe). Der halbe Rohrquerschnitt wurde mit $24 \times 16 \times 38$ Knoten in Axial, Radial- sowie Umfangsrichtung diskretisiert.

5.2.2 Darstellung der Ergebnisse

Anhand der nachfolgenden Bilder werden die Berechnungsergebnisse für den Fall des Geschwindigkeitsverhältnisses $R = 0,5$ vorgestellt und bewertet. Die betrachteten Strömungsgrößen sind die Komponenten der mittleren Strömungsgeschwindigkeit \bar{u} , \bar{v} und \bar{w} , die turbulente kinetische Energie k sowie die Temperatur- bzw. Mischungsverteilung θ . Die Größen sind auf die mittlere Anströmgeschwindigkeit $U_{ref} = 13,9\text{ m/s}$ bezogen. Im Fall der Temperatur wurde eine Normierung verwendet, die einen Wertebereich von (0-1) ergibt: $\theta = \frac{T - T_{ref}}{T_j - T_{ref}}$. Der Koordinatenursprung befindet sich im Querschnittsmittelpunkt des Rohrzuführungsendes (vgl. auch Bild 5.3). Die Größen werden an verschiedenen Positionen

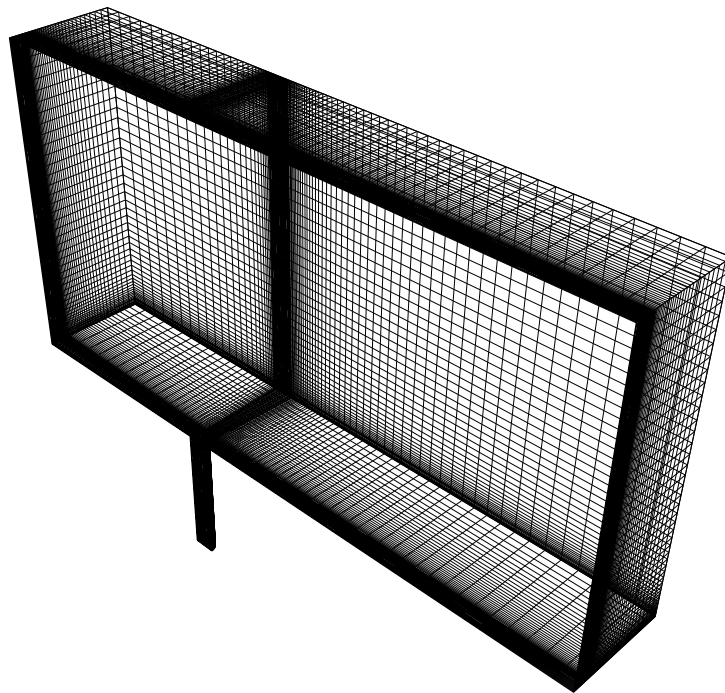


Bild 5.4: Strahl in Querströmung. Rechengitter

in Strömungsrichtung (x -Koordinate) über der wandnormalen Richtung (z -Koordinate) in zwei verschiedenen Ebenen aufgetragen. Zum einen die Symmetrieebene ($y/D = 0$) und zum anderen eine Ebene parallel dazu entlang der äußeren Kante der Rohrzuführung ($y/D = 0,5$). Alle Raumkoordinaten sind auf den Durchmesser der Rohrzuführung $D = 0,05\text{ m}$ bezogen.

Bild 5.5 zeigt die Verteilungen der Hauptstromgeschwindigkeit an sechs verschiedenen Positionen in Strömungsrichtung jeweils in der Symmetrieebene ($y/D = 0$, im Bild unten) sowie parallel dazu versetzt bei $y/D = 0,5$ (im Bild oben). Die Übereinstimmung zwischen gerechneten und gemessenen Hauptstromgeschwindigkeiten ist insbesondere in der Symmetrieebene gut. Die größten Unterschiede ergeben sich an der Position $x/D = 1$ stromab der Einblasestelle. Im Gegensatz zu den Messungen sagen alle Turbulenzmodelle dort im Bereich $0 \leq z/D \leq 0,4$ ein Gebiet negativer Hauptstromgeschwindigkeit voraus. Diese Diskrepanz hängt vermutlich mit der Schwäche der verwendeten Messtechnik (Hitzdrahtanemometrie) zusammen, Strömungsumkehrungen korrekt zu erkennen. Bei den eingesetzten Wirbelviskositätsmodellen lassen sich untereinander nur geringe Abweichungen feststellen. Generell liegen die berechneten Verteilungen des $k-\omega$ Turbulenzmodells betragsmäßig leicht höher als die der anderen Modelle. Daraus lässt sich jedoch keine generell bessere Übereinstimmung mit den Messwerten ableiten.

In der Ebene $y/D = 0,5$ ist ebenfalls eine im allgemeinen gute Übereinstimmung von Messung und Rechnung zu beobachten. Abweichungen sind lediglich an den Positionen $x/D = 0$ und $x/D = 0,25$ im Bereich $z/D \leq 0,2$ zu beobachten. Dort wird die

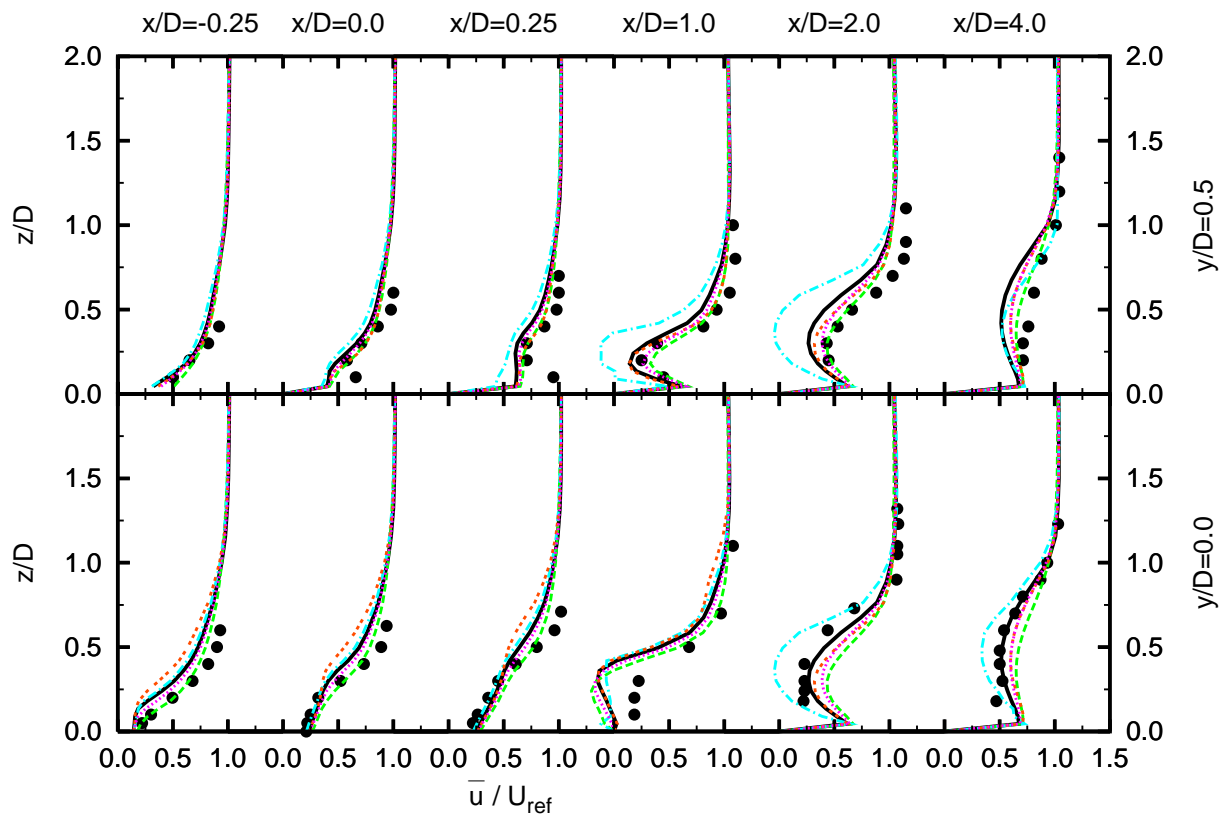


Bild 5.5: Mittlere Geschwindigkeitskomponente \bar{u} . Symbole: Exp.:●, $k-\epsilon$:—, $k-\omega$:---, QLM:····, ASM:— · —, LRR:— — —

Hauptströmung aufgrund der senkrechten Strahleinblasung in Wandnähe umgelenkt und beschleunigt. Es bildet sich ein Geschwindigkeitsminimum bei $z/D = 0,2$ heraus. Diesen Beschleunigungseffekt kann keines der verwendeten Turbulenzmodelle erfassen. Weiter stromab der Einblasung wird das Minimum dann in Übereinstimmung mit den Messwerten richtig vorhergesagt. Wiederum sind die mit dem $k-\omega$ berechneten Geschwindigkeiten tendenziell etwas höher als die der anderen Turbulenzmodelle. In diesem Fall ergibt sich dadurch eine Verbesserung der Übereinstimmung mit den experimentellen Daten. Das aus Vergleichszwecken eingesetzte Reynolds-Spannungsmodell (LRR) liefert keine Verbesserungen der Vorhersagegüte. Vielmehr wird das Rückströmgebiet deutlich zu ausgeprägt berechnet.

Bild 5.6 zeigt die Verteilungen der mittleren Geschwindigkeitskomponente \bar{w} in Richtung der Strahleinblasung senkrecht zur Bodenplatte des Hauptkanals. Die Übereinstimmung zwischen Messung und Rechnung ist insgesamt recht gut. Im Bereich der Strahleinblasung (die Positionen $x/D = -0,25, 0, 0,25$) liegen die berechneten Geschwindigkeiten aller Turbulenzmodelle leicht über den Messwerten. Bis auf das ASM Modell sagen alle anderen Modelle die selben Verteilungen voraus. Das ASM überschätzt in diesem Bereich das Strahleindringverhalten durchgängig. Bei den anderen Turbulenzmodellen ist dieses Verhalten auf die unmittelbare Nähe der Strahleinblasung ($z/D \leq 0,1$) beschränkt.

Die Geschwindigkeitsverteilungen in diesem Bereich zeigen, wie schnell der Strahl von der Hauptströmung umgelenkt wird. Im vorderen Einblasebereich ($x/D = -0,25$) ist die Strahlgeschwindigkeit bereits beim Eintritt in den Hauptkanal fast vollständig abgebaut. Die nominell volle mittlere Austrittsgeschwindigkeit von $\bar{w}/U_{ref} = 0,5$ wird lediglich in unmittelbarer Nähe der Einblasung ($z/D = 0$) an der Position $x/D = 0,25$ erreicht.

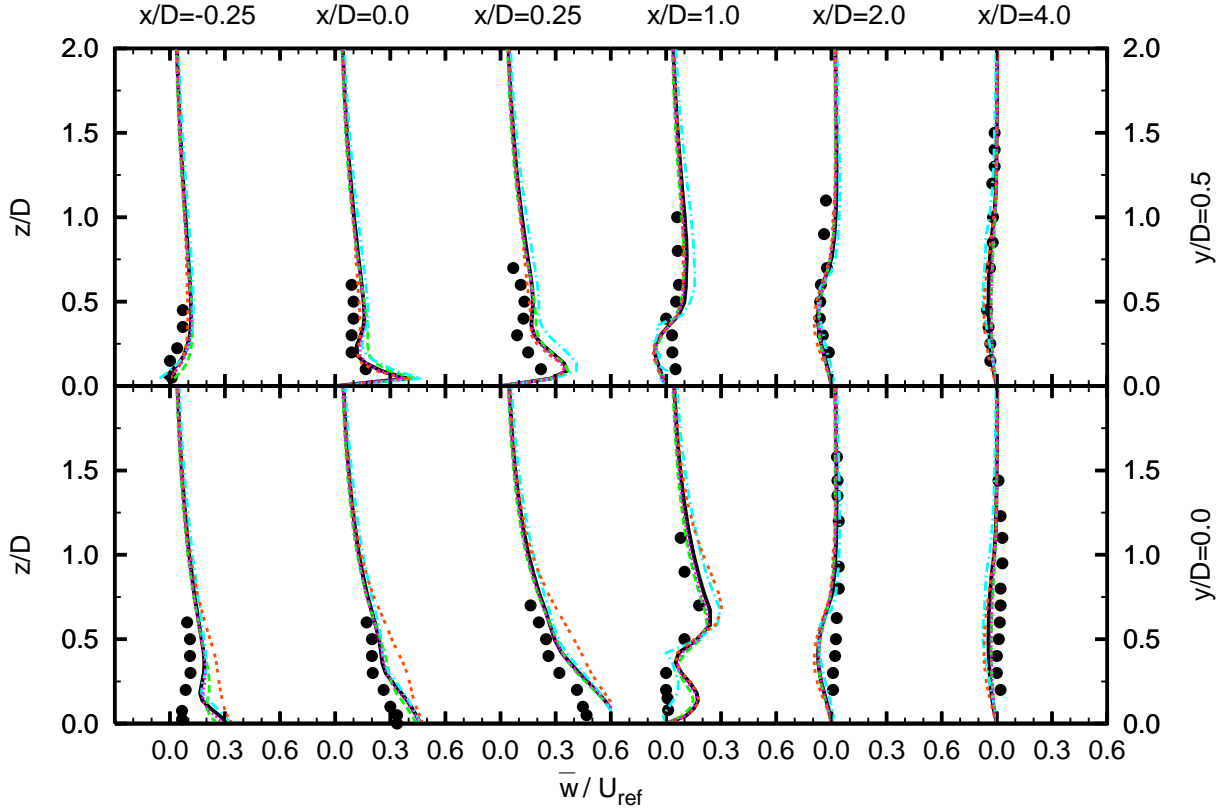


Bild 5.6: Mittlere Geschwindigkeitskomponente \bar{w} . Symbole: Exp.:●, $k-\epsilon$:—, $k-\omega$:— —, QLM:····, ASM:— · —, LRR:— — —

An der Position $x/D = 1$ treten im wandnahen Bereich ($z/D \leq 0,3$) Abweichungen zwischen Messung und Rechnungen auf, die mit der Lage und Ausdehnung des berechneten Rückströmgebiets in Zusammenhang stehen. Gleiches gilt für die weiter stromab gelegene Position $x/D = 2$, wobei die Abweichungen zusehends kleiner werden. Ab $x/D = 4$ treten keine nennenswerten Unterschiede mehr auf. Zwischen den Turbulenzmodellen existieren nur geringe Unterschiede. In der Ebene $y/D = 0,5$ verbessert sich der Grad der Übereinstimmung zwischen Messung und Rechnung nochmals leicht. Die in der Symmetrieebene festgestellte Überschätzung der Normalgeschwindigkeit \bar{w} im Bereich der Strahleinblasung findet sich hier nur noch an der Position $x/D = 0,25$ im Bereich $z/D \leq 0,25$. Ansonsten ist der Übereinstimmungsgrad hoch, insbesondere wenn man die wandnahen Messwerte an der Position $x/D = 1$ vor dem Hintergrund der eingesetzten Messtechnik bewertet. Wie bereits von den Autoren der Messungen [4] erwähnt, sind die Messungen in Bereichen hoher Turbulenzintensitäten, wie sie beispielsweise auch in Rückströmgebieten anzutreffen sind, mit einer höheren Messunsicherheit behaftet.

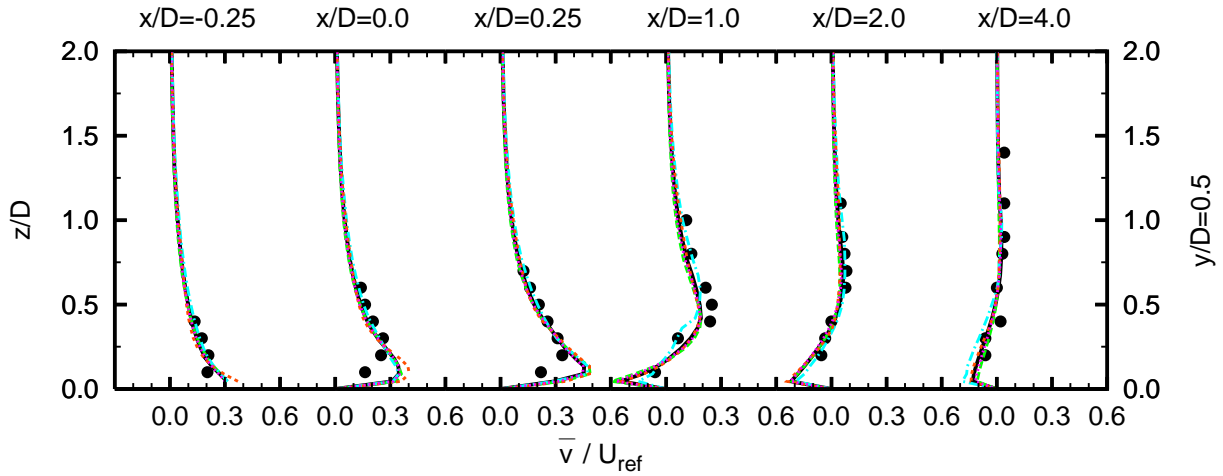


Bild 5.7: Mittlere Geschwindigkeitskomponente \bar{v} . Symbole: Exp.:●, k - ϵ :—, k - ω :— —, QLM:····, ASM:— · —, LRR:— — —

Bild 5.7 zeigt die Geschwindigkeitsverteilung der Komponente \bar{v} quer zur Hauptströmungsrichtung parallel zur Bodenplatte in der Ebene $y/D = 0,5$. Im Bereich der Strahleinblasung sieht man die durch die Strahleinblasung bedingte Umlenkung des Hauptstromfluids. Sie hat in unmittelbarer Wandnähe ihr Maximum und nimmt mit größer werdendem Abstand kontinuierlich ab. Sowohl beim Ort als auch bei der Ausprägung des Maximums gibt es zwischen Messung und Rechnungen Abweichungen. Alle Turbulenzmodelle bestimmen den Ort in einem Abstand von $z/D = 0,1$ zur Wand, die Messungen geben ihn bei $z/D = 0,2$ an. Zudem überschätzen die Rechnungen unabhängig vom eingesetzten Turbulenzmodell das Maximum etwas. Die Übereinstimmung zwischen Messung und Rechnung ist mit größer werdendem Abstand zur Wand sehr gut. Gleiches gilt für die stromab der Einblasung gelegenen Positionen im kompletten Messbereich. Man erkennt an den Geschwindigkeitsverläufen stromab der Einblasung, wie in unmittelbarer Wandnähe Fluid zur Symmetrieebene hinströmt und sich mit zunehmender Entfernung die Strömungsrichtung umkehrt.

Bild 5.8 zeigt die Verteilung der turbulenten kinetischen Energie in der Symmetrieebene ($y/D = 0$, im Bild unten) sowie in der parallel verlaufenden Ebene $y/D = 0,5$. Im Zuströmungsbereich der Symmetrieebene ist die Übereinstimmung zwischen Messung und Rechnungen der Turbulenzmodelle QLM sowie k - ω sehr gut. Ort und Höhe des Maximums von k werden korrekt wiedergegeben. Bei den anderen Modellen ergeben sich diesbezüglich Abweichungen. Das Maximum der turbulenten kinetischen Energie verstärkt sich stromab und entfernt sich zudem kontinuierlich von der Bodenplatte. Von den betrachteten Modellen können diesen Trend das QLM und das k - ϵ Modell am besten wiedergeben. Das k - ω Modell überschätzt und das LRR Modell unterschätzt das Maximum. Weiter stromab gleichen sich die Verläufe von k einander wieder an. Die deutliche Überschätzung von k durch das k - ω Modell ist insofern bemerkenswert, als bei

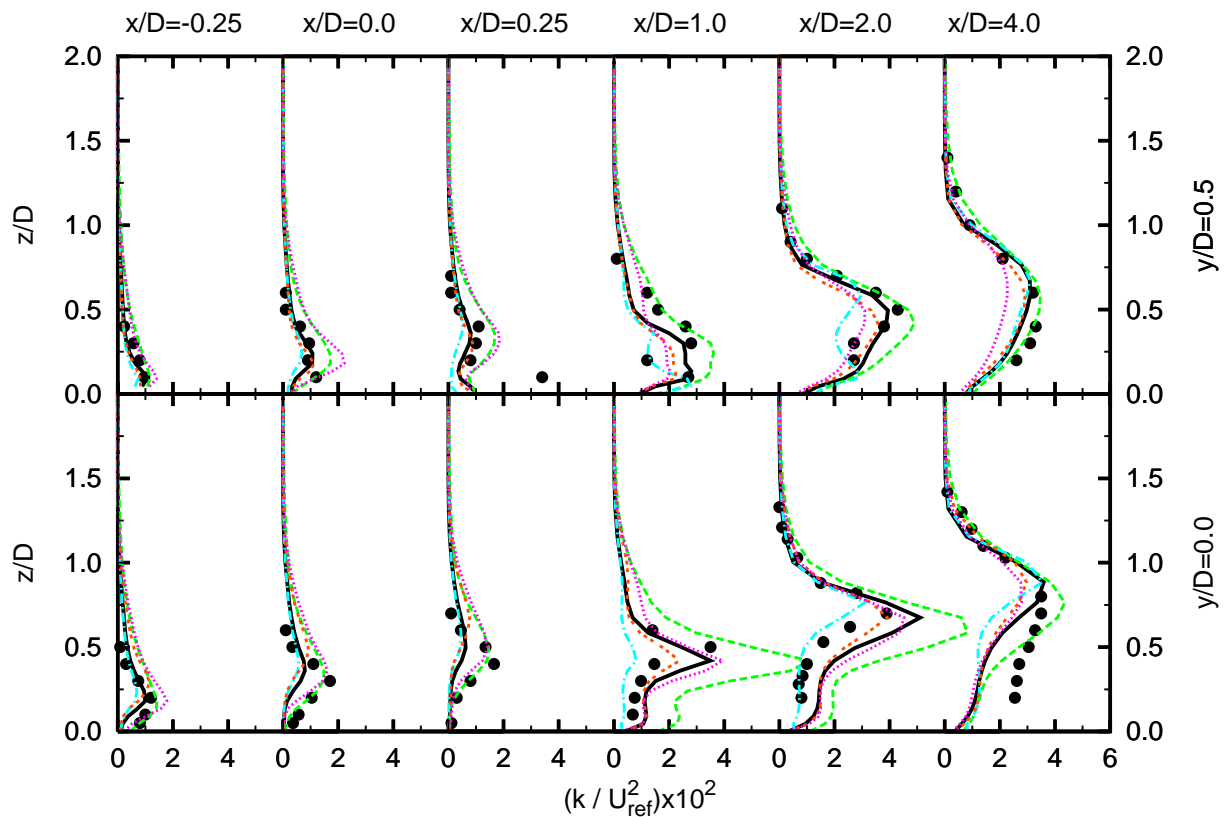


Bild 5.8: Turbulente kinetische Energie k . Symbole: Exp.:●, k - ϵ :—, k - ω :—, QLM:····, ASM:---, LRR:-.-.

allen Wirbelviskositätsmodellen die Produktion turbulenter kinetischer Energie (den man als dominierenden Mechanismus betrachten kann) in Abhängigkeit der Gradienten der mittleren Strömungsgeschwindigkeitskomponenten berechnet wird, die bei allen Modellen in diesem Bereich ähnlich sind (vgl. Bilder 5.5- 5.7). Dies legt den Schluss nahe, dass die Unterschiede auf unterschiedlich groß berechnete Werte der Wirbelviskosität zurückzuführen sind, da ja die Wirbelviskosität neben den Geschwindigkeitsgradienten als einzig weiterer Parameter in die Berechnung des Produktionsterms mit einfließt (s. Gleichung (2.44)).

In der Ebene $y/D = 0,5$ (im Bild 5.8 oben) wird im Zuströmungsbereich die Verteilung der turbulenten kinetischen Energie vom QLM und dem k - ω Turbulenzmodell gegenüber den Messungen leicht überschätzt. Die anderen Turbulenzmodelle liefern eine recht gute Übereinstimmung mit den Messwerten. Im Nachlaufbereich der Zuströmung ist die Übereinstimmung zwischen Messung und Rechnung generell recht gut, sowohl bezüglich der berechneten Verteilungen als auch hinsichtlich der Orte und Ausprägung der Turbulenzmaxima. Einzig das LRR Modell zeigt ein etwas abweichendes Verhalten. Ihm gelingt die Berechnung der Turbulenzminima am besten, kann dafür aber die Maxima nicht gleichermaßen gut berechnen. Mit zunehmender Lauflänge gleichen sich die Verteilungen einander an und erreichen eine gute Übereinstimmung mit den Messwerten.

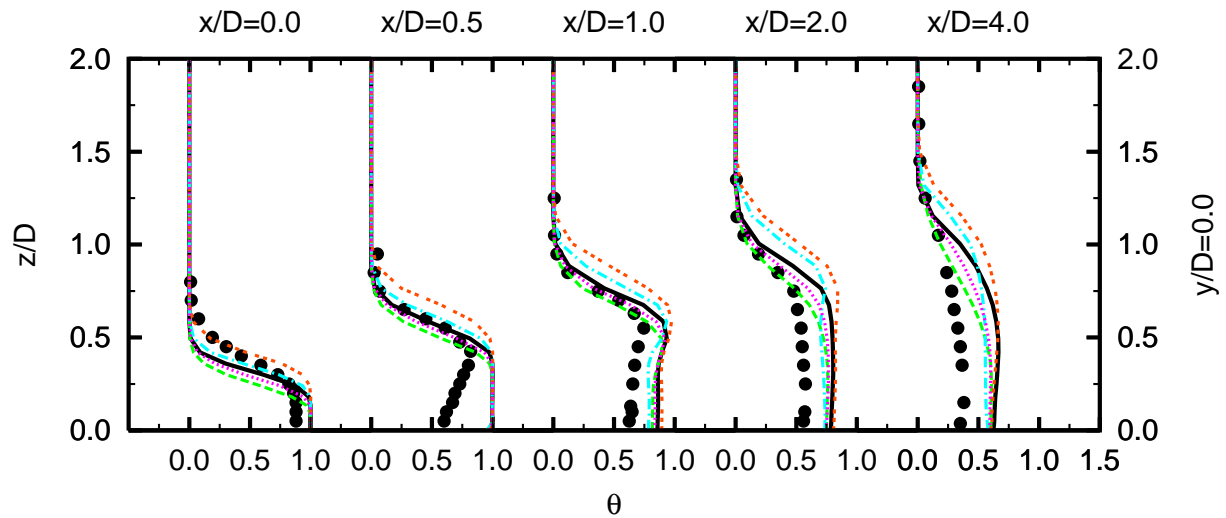


Bild 5.9: Bezogene Temperatur θ . Symbole: Exp.:●, k - ϵ :—, k - ω :---, QLM:····, ASM:-·-·-, LRR:-- --

Bild 5.9 zeigt die Verteilung der mittleren dimensionslosen Temperatur- bzw. Mischungsvariablen θ in der Ebene $y/D=0$. Die Verteilung der Variablen θ ist so zu interpretieren, dass der Wert $\theta = 0$ dem Hauptstromfluid und der Wert $\theta = 1$ dem zugeführten Fluid entspricht. Generell ist die Übereinstimmung zwischen gemessenen und gerechneten Temperaturverteilungen recht gut. Als allgemeiner Trend zeigt sich, dass unabhängig vom Turbulenzmodell die gemessenen Mischungsvorgänge etwas diffusiver als die gerechneten sind. Die gemessenen Unterschiede zwischen beiden Fluiden werden schneller abgebaut. An der Position $x/D=0$, die der Mittelachse der Zuführung entspricht, strömt das Fluid mit $\theta = 1$ aus und mischt sich mit dem Hauptstromfluid. Der gemessene Mischungsbereich als Übergangsbereich zwischen den beiden ungemischten Zuständen beginnt bei $z/D=0,2$ und endet bei $z/D=0,6$. Abgesehen vom ASM Modell, das an dieser Stelle den experimentellen Verlauf am besten trifft, sagen alle anderen Modelle das obere Ende der Mischzone bei $z/D=0,5$ voraus. Weiter stromab kehrt sich dieses Bild um. Der mit dem ASM Modell berechnete Mischungsbereich liegt generell etwas weiter von der Bodenplatte entfernt als experimentell gemessen. Die Übereinstimmung zwischen Messung und Rechnung ist für die anderen Turbulenzmodelle höher. An der Stelle $x/D=0,5$ ist im Bereich $z/D \leq 0,4$ eine deutliche Diskrepanz in den Verläufen der gemessenen und gerechneten Temperaturverteilungen auszumachen. Während alle Turbulenzmodelle eine konstante dimensionslose Temperatur $\theta = 1$ (entsprechend dem ungemischten Strahlfluid) vorhersagen, fällt der gemessene Wert bis auf $\theta = 0,6$. Der gemessene Verlauf gibt trotz des stromab gelegenen Rückströmgebiets Anlass zu Spekulationen, wenn man bedenkt, dass die Stelle $x/D = 0,5$ exakt der Hinterkante der Strahleinblasung entspricht und der eingeblassene Strahl durch die Hauptströmung stromab abgelenkt wird. Der tatsächliche Verlauf liegt vermutlich im Bereich zwischen gerechneter und gemessener Verteilung, zumal sowohl die weiter stromab als auch die stromauf gelegene Position eine deutlich

verbesserte Übereinstimmung in diesem Bereich zeigt. Der weiter entfernte Abschnitt $z/D \geq 0,4$ wird dann insbesondere vom QLM, aber auch vom $k-\epsilon$ und dem $k-\omega$ Modell sehr gut vorhergesagt. Weiter stromab ist die Gesamtsituation ähnlich. Das QLM sowie das $k-\omega$ Turbulenzmodell erzielen insgesamt den höchsten Übereinstimmungsgrad mit den gemessenen Mischungsverteilungen.

5.3 Drallströmung in einer Brennkammergeometrie

Der Berechnung drallbehafteter turbulenter Strömungen kommt bei der Betrachtung der Geschehnisse im Primärzonenbereich einer Gasturbinenbrennkammer eine zentrale Bedeutung zu. Die Beaufschlagung der Strömung mit Drall hat sich als eine der wichtigsten Maßnahmen zur Brennkammergestaltung herausgestellt und etabliert. Das stark dreidimensionale Strömungsfeld begünstigt zum einen den Prozess der Brennstoffaufbereitung. Die Ausbildung der mit heißen Abgasen gefüllten Rezirkulationszone ermöglicht zum anderen eine stabile Verbrennung, da sich in diesem Gebiet mit geringer Strömungsgeschwindigkeit eine über der Zündtemperatur liegende Temperatur einstellt. Wie Kapitel 3.5 gezeigt hat, beeinflusst das Auftreten von Drall in turbulenten Strömungen sowohl das mittlere Strömungsfeld, aber auch die Struktur der turbulenten Größen maßgeblich, indem turbulente Austauschvorgänge durch die in Drallströmungen auftretenden Volumenkräfte gedämpft oder angefacht werden. Deshalb stellen Drallströmungen und Strömungen mit Systemrotation besondere Anforderungen an Turbulenzmodelle.

Der nachfolgend betrachtete Testfall eignet sich besonders für eine detaillierte numerische Untersuchung, da für diesen Fall ausführliche Messungen der turbulenten Strömungsgrößen durchgeführt worden sind und zudem die Messungen im Hinblick auf spätere numerische Untersuchungen konzipiert und durchgeführt wurden (z.B. definierte Eintrittsrandbedingungen).

5.3.1 Versuchsaufbau und Diskretisierung

Bei dem von Holzäpfel durchgeführten Untersuchungen [24, 25] wird eine verdrehte Luftströmung in einer zylindrischen Modellbrennkammer mit einem Außendurchmesser von $D=0,447\text{ m}$ und einer Gesamtlänge von $L=0,765\text{ m}$ untersucht, die in Bild 5.10 skizziert ist. Der Luftmassenstrom wird mit Hilfe eines sog. *movable block* Drallerzeugers mit Drall beaufschlagt und gelangt über einen kreisringförmigen Einlass in die Modellbrennkammer. Der Innendurchmesser beträgt $d_i=0,052\text{ m}$, der Außendurchmesser $d_a=0,107\text{ m}$. Wegen der variablen Geometrie des Drallerzeugers konnten zwei verschiedene Drallzahlen ($S_0=0,4$, $S_0=0,95$) untersucht werden. Als Auslass der Modellbrennkammer wurde ebenfalls ein kreisringförmiger Querschnitt mit den Durchmessern $d_i=0,11\text{ m}$ und $d_a=0,15\text{ m}$ gewählt, an den ein Rohrstück mit denselben Abmessungen und einer Länge von $L=0,6\text{ m}$

angeschlossen wurde. Durch die Querschnittsverengung am Brennkammeraustritt wird die Strömung dort beschleunigt und mögliche Rückströmgebiete vermieden. Die Gestaltung von Einlass- und Auslassgeometrie wurde bewusst gewählt, um spätere numerische Untersuchungen zu unterstützen.

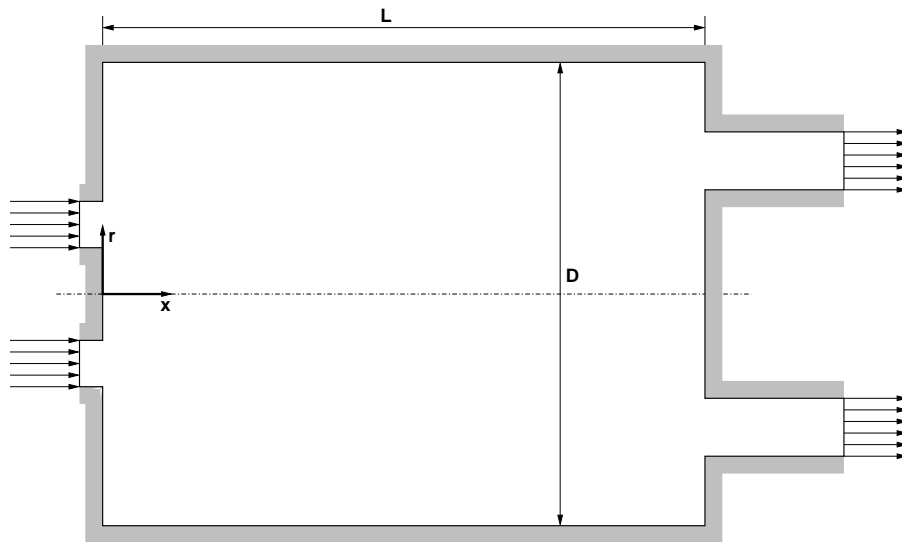


Bild 5.10: Drallströmung in Brennkammergeometrie. Versuchsaufbau

In der Brennkammer wurden mit Hilfe der Hitzdrahtanemometrie umfangreiche Messungen durchgeführt. Dabei wurden neben den mittleren Strömungsgrößen auch alle Komponenten des turbulenten Reynolds-Spannungstensors bestimmt. Direkt am Brennkammereintritt ($x/L=0$) wurden ebenfalls Messungen durchgeführt, damit diese als Eintrittsrandbedingung für numerische Simulationen genutzt werden können. Messungen der Dissipationsrate ϵ wurden nicht vorgenommen.

Für die Berechnungen wurde der Bereich der Modellbrennkammer vollständig berücksichtigt sowie zusätzlich ein Teilstück des Abströmrohres mit einer Länge von $l = 0,135\text{ m}$. Trotz der Rotationssymmetrie wurde der vollständige Strömungsquerschnitt diskretisiert. Wurde lediglich ein Segment des kreisförmigen Strömungsquerschnitts berücksichtigt, ergaben sich bei den Berechnungen mit dem LRR Turbulenzmodell teilweise Konvergenzprobleme¹⁶. In der Basisdiskretisierung wurde der Bereich der Brennkammer mit $50 \times 66 \times 104$ Elementen in axialer, radialer sowie tangentialer Richtung diskretisiert. Das Teilstück des Abströmrohres wurde entsprechend mit $20 \times 13 \times 104$ Elementen berücksichtigt. Damit ergibt sich eine Gittergröße von etwa 336.440 Elementen.

¹⁶Die Konvergenzprobleme könnten durch die Behandlung der Reynolds-Spannungskomponenten an periodischen Rändern hervorgerufen worden sein.

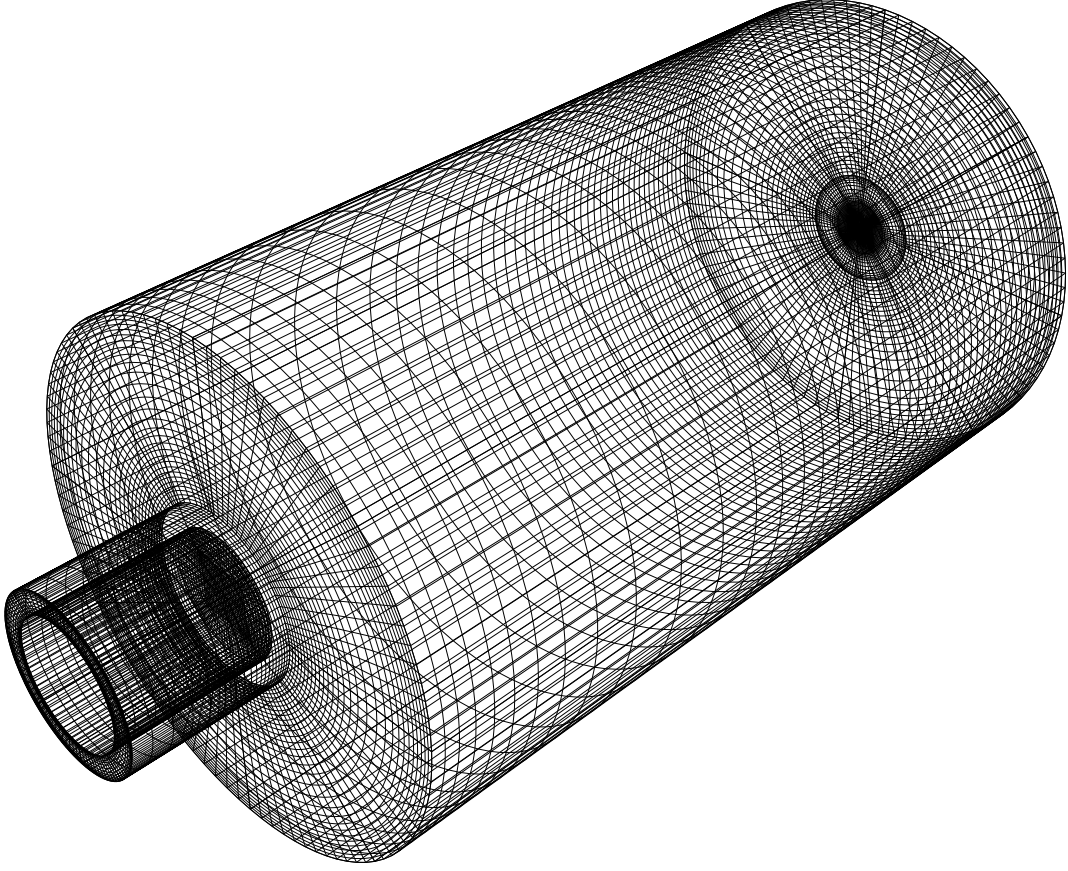


Bild 5.11: Drallströmung in Brennkammergeometrie. Rechengitter

Die verwendeten Randbedingungen sind *inlet*, *opening* und *wall*. Am Einlass, der sich in Bild 5.11 oben rechts befindet, wurden die gemessenen Profilrandbedingungen für die mittleren Geschwindigkeiten und die turbulenten Größen vorgeschrieben. Die Eintrittsrandbedingung für die Dissipationsrate ϵ ist unbekannt und muss abgeschätzt werden. Zur Bestimmung von ϵ stehen verschiedene Möglichkeiten zur Auswahl. Davon werden drei benutzt, um den Einfluss der Dissipationsrate auf das Berechnungsergebnis abschätzen zu können.

$$\epsilon = \frac{k^{\frac{3}{2}}}{L_t} \quad (5.2)$$

$$\epsilon = \sqrt{C_\mu} k \left[\left(\frac{\partial U}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial r} - \frac{W}{r} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (5.3)$$

$$\epsilon = C_\mu k^2 \frac{[(\frac{\partial U}{\partial r})^2 + (\frac{\partial W}{\partial r} - \frac{W}{r})^2]^{\frac{1}{2}}}{[(\overline{u'v'})^2 + (\overline{v'w'})^2]^{\frac{1}{2}}} \quad (5.4)$$

Ansatz (5.2) ist der Standardansatz zur Bestimmung von ϵ . Er leitet sich aus der Annahme

der turbulenten Energiekaskade ab. Ansatz (5.3) lässt sich mit Hilfe der Annahme des lokalen Gleichgewichts ($P_k = \epsilon$) ableiten. Ansatz (5.4) ergibt sich mit Hilfe der Definition der Wirbelviskosität ($\mu_t = C_\mu \frac{k^2}{\epsilon}$) und der Boussinesq-Hypothese ($\overline{\rho u'_i u'_j} = \rho \frac{2}{3} k \delta_{ij} - \mu_t (\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i})$) ebenfalls aus der Gleichgewichtshypothese.

Die Haftbedingung an der Wand wurde mit Standard Wandfunktionen bzw. mit der in CFX-TASCflow verfügbaren Option *fixed wall distance* modelliert. Am Auslass wurde ein konstanter Druck von $p = 0 \text{ Pa}$ vorgegeben, der Einstrom von Fluid ist zulässig (= *opening*). Für die turbulenten Größen des evtl. einströmenden Fluids wurde ein Turbulenzgrad von $Tu = 0,05$ sowie ein Verhältnis turbulenter zur molekularen Viskosität $\frac{\nu_t}{\nu} = 10$ angesetzt. Dort sind keine Messwerte verfügbar.

5.3.2 Darstellung der Ergebnisse

Nachfolgend werden anhand der Bilder 5.12 bis 5.15 die gemessenen Verteilungen der Strömungsgrößen der mittleren Axial-, Radial- und Umfangsgeschwindigkeitskomponente sowie der turbulenten kinetischen Energie vorgestellt und mit den Berechnungsergebnissen verglichen. Die Strömungsgrößen sind jeweils auf eine mittlere Axialgeschwindigkeitskomponente von $U_{ref} = 20,49 \text{ m/s}$ bezogen. Die radiale Position wurde auf den Außenradius der Modellbrennkammer $R = 0,2235 \text{ m}$ bezogen. Die Größen werden an insgesamt 8 in Hauptströmungsrichtung befindlichen axialen Positionen vorgestellt, die in zwei Spalten zu je 4 Diagrammen angeordnet sind. Die erste betrachtete Messposition liegt $x = 40 \text{ mm}$ stromab des Einlasses und befindet sich jeweils links unten in den Bildern 5.12-5.15. Die am weitesten stromab gelegene Messposition befindet sich in einem Abstand von $x = 680 \text{ mm}$ vom Einlass (bei einer Gesamtlänge der Modellbrennkammer von $L = 765 \text{ mm}$). Sie ist oben rechts in den Diagrammen der nachfolgenden Bilder zu finden.

Bild 5.12 zeigt die Verteilung der mittleren Axialgeschwindigkeit über dem bezogenen Brennkammerradius an 8 verschiedenen Messebenen der Modellbrennkammer. An der Position $x = 40 \text{ mm}$ ist bedingt durch den kreisringförmigen Brennkammereinlass (bei $x = 0 \text{ mm}$) an der Stelle $r/R = 0,2$ ein ausgeprägtes Maximum der mittleren Axialgeschwindigkeit U zu erkennen. Die Geschwindigkeit fällt in beide Richtungen schnell ab und nähert sich sowohl in Richtung Außenwand als auch in Richtung der Mittelachse dem Wert 0 an. In unmittelbarer Nähe der Mittelachse lässt sich anhand der Messwerte bereits der Beginn der Rezirkulationszone erkennen. Mit zunehmendem Abstand zum Brennkammereinlass schwächt sich das Geschwindigkeitsmaximum zusehends ab. Gleichzeitig bewegt sich dessen Ort kontinuierlich nach außen. An der Position $x = 240 \text{ mm}$ ist das Geschwindigkeitsmaximum praktisch vollständig abgebaut. An diesen ersten vom Einlass beeinflussten Strömungsbereich schließt sich ein zweiter, vom Brennkammerauslass beeinflusster Strömungsbereich an. Es bildet sich an der Mittelachse ein leichtes

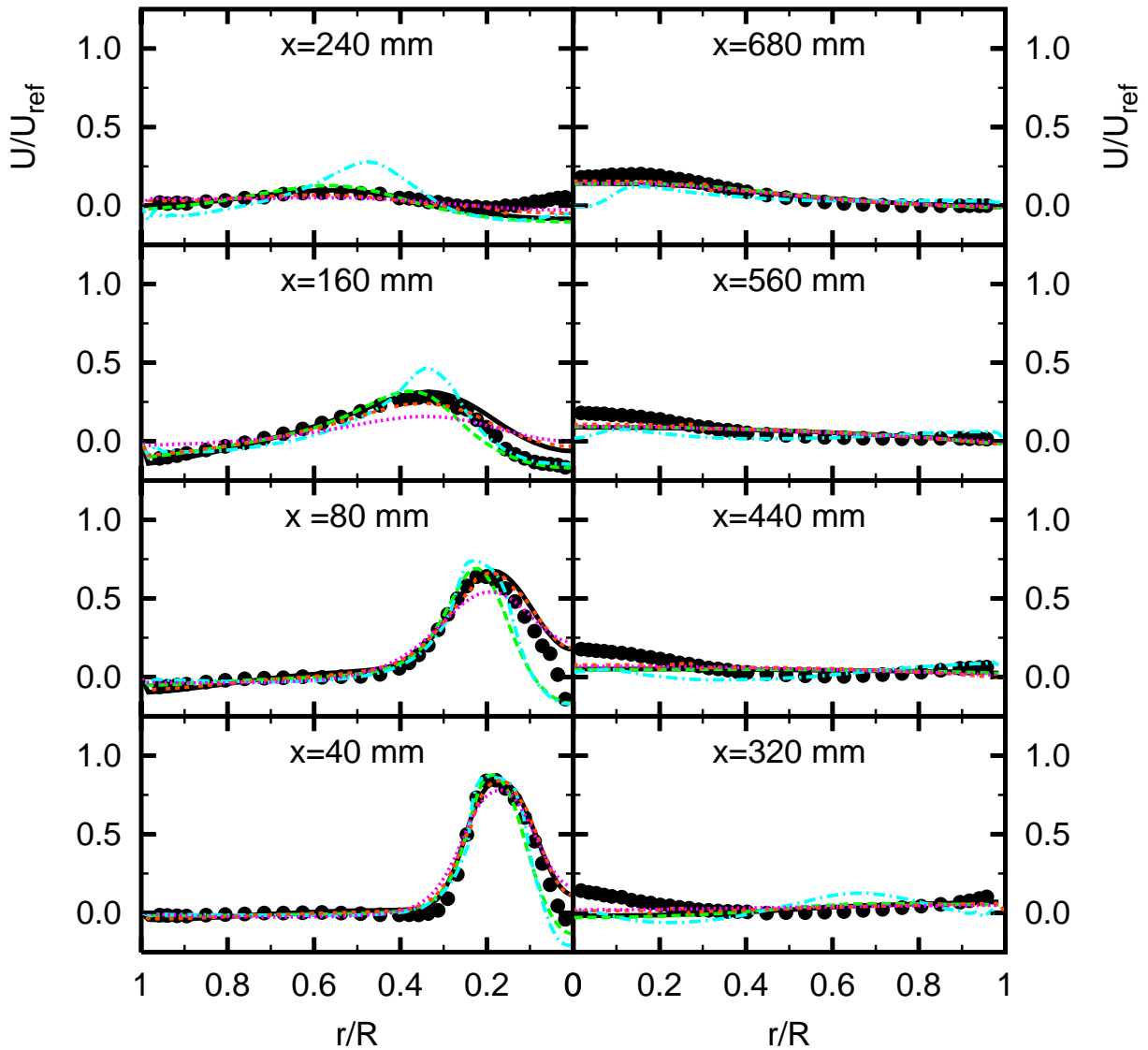


Bild 5.12: Mittlere Axialgeschwindigkeit U . Symbole: Exp.:● $k-\epsilon$:—, $k-\omega$:—, QLM:····, ASM:---, LRR:--·-

Geschwindigkeitsmaximum aus, das sich aufgrund der Auslassgeometrie allmählich verbreitert und seine radiale Position von der Mittelachse weg verlagert.

Die verwendeten Turbulenzmodelle können die gemessenen Axialgeschwindigkeitsverteilungen im Einflussbereich des Brennkammereinlasses alle sehr gut nachbilden. Lediglich beim $k-\epsilon$ und beim QLM Modell wird der Rückgang der Axialgeschwindigkeitskomponente im Bereich der Mittelachse etwas unterschätzt. Dieser Trend verstärkt sich noch etwas weiter stromab an der Position $x = 80 \text{ mm}$. Keines der beiden Modelle sagt eine negative Axialgeschwindigkeitskomponente voraus. Das QLM Modell unterschätzt zudem dort das an der Position $r/R = 0,2$ befindliche Geschwindigkeitsmaximum. Weiter stromab bei $x = 160 \text{ mm}$ ergibt sich wiederum ein ähnliches Bild. An der Stelle $x = 240 \text{ mm}$ endet das vom Einlassbereich beeinflusste Strömungsgebiet. Das ursprüngliche Geschwindigkeitsma-

ximum hat sich fast vollständig abgebaut. Dieser Bereich wird wieder von allen Turbulenzmodellen richtig wiedergegeben. Das sich ausbildende Geschwindigkeitsmaximum an der Mittelachse wird unabhängig vom eingesetzten Turbulenzmodell unterschätzt. Dieser Trend setzt sich bis kurz vor den Brennkammerauslass fort. An der Position $x = 680 \text{ mm}$ ist der Einfluss der ringkreisförmigen Auslassgeometrie in Form eines etwas ausgeprägteren Geschwindigkeitsmaximums bei $r/R = 0,15$ zu erkennen. Dies wird wiederum unabhängig vom Turbulenzmodell in recht guter Übereinstimmung mit den Messwerten berechnet.

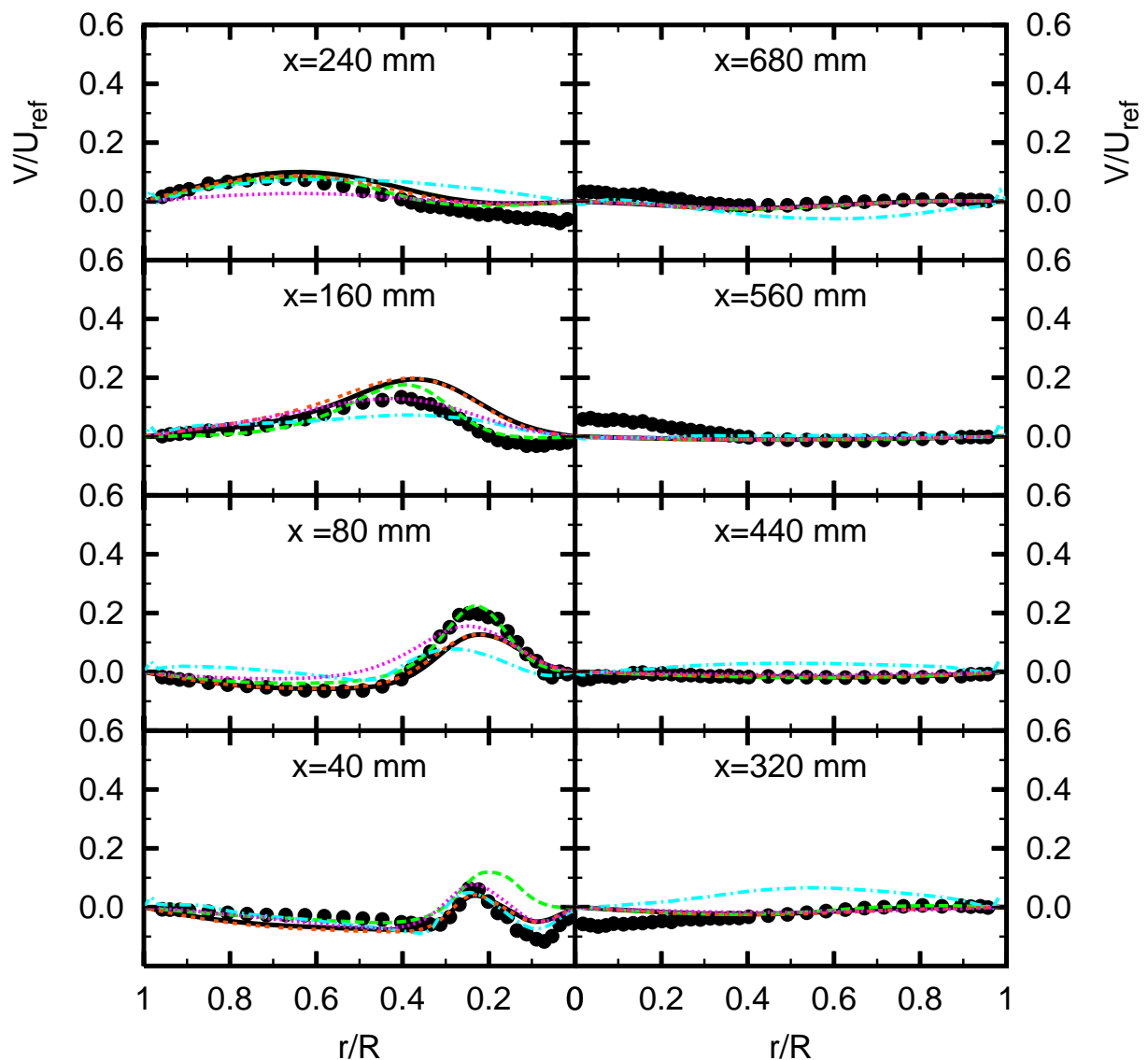


Bild 5.13: Mittlere Radialgeschwindigkeit V . Symbole: Exp.: \bullet $k\text{-}\epsilon$: —, $k\text{-}\omega$: —, QLM: \cdots , ASM: $---$, LRR: $- \cdot -$

Bild 5.13 zeigt die Verteilung der mittleren Radialgeschwindigkeit im Strömungsfeld. Die Radialgeschwindigkeit ist im ersten Strömungsbereich ($x \leq 250 \text{ mm}$) von der Form und Lage der zentralen Rezirkulationszone geprägt. Durch die Rezirkulationszone wird die Strömung zunächst von der Symmetrieachse weg radial nach außen umgelenkt und strömt

gegen Ende der Zone wieder in Richtung der Symmetrieachse. Im Einflussbereich der Auslassgeometrie ist dann an der Mittelachse wieder eine radial nach außen gerichtete Bewegung zu registrieren, während in einer Art Übergangsphase ($x = 440 \text{ mm}$) praktisch keine radiale Strömungsbewegung gemessen wurde. Im Hinblick auf die gemessenen Radialgeschwindigkeiten in unmittelbarer Nähe zur Mittelachse ist zu bemerken, dass die dort gemessenen Werte gegen die Rotationssymmetrie der Drallströmung sprechen bzw. für die Existenz von Messfehlern oder instationären Effekten der vermessenen Strömung.

Die berechneten Geschwindigkeitsverteilungen stimmen kurz nach dem Eintritt ($x = 40 \text{ mm}$) gut mit der gemessenen Verteilung überein. Lediglich das $k\text{-}\omega$ Modell sagt das Minimum der radialen Geschwindigkeit bei $r/R = 0,08$ in der Form nicht voraus. Die anderen Modelle unterschätzen das Minimum nur leicht, sagen aber Ort ($r/R = 0,25$) und Höhe ($V/U_{ref} = 0,08$) des lokalen Maximums richtig voraus. Bereits an der Stelle $x = 80 \text{ mm}$ hat sich die Situation geändert. Das achsnahe Minimum ist stark abgeschwächt und das lokale Maximum ist auf ($V/U_{ref} = 0,2$) angewachsen. Dabei erzielt das $k\text{-}\omega$ Modell die beste Übereinstimmung, während die anderen Modelle die Höhe des Maximums leicht unterschätzen. Im weiteren Verlauf schwächt sich das Maximum der radialen Geschwindigkeitskomponente wieder ab und bewegt sich in Richtung Brennkammerwand. An der Position $x = 240 \text{ mm}$ liegt es bei $r/R = 0,7$ bei einer Höhe von $V/U_{ref} = 0,1$. Abgesehen vom QLM Modell können alle betrachteten Turbulenzmodelle Ort und Ausprägung des Maximums gut wiedergeben. In Richtung der Symmetrieachse nimmt die Radialgeschwindigkeit zunehmend ab. Sie ist im Bereich $r/R = 0 - 0,4$ negativ. Dort ergeben sich Unterschiede im Vergleich zu Messung und Rechnung. Die berechneten radialen Geschwindigkeiten verringern sich ebenfalls und verschwinden in unmittelbarer Achsnähe, werden aber nicht negativ. Ein ähnliches Bild mit umgekehrtem Vorzeichen ist an der Position $x = 560 \text{ mm}$ zu beobachten. Dort ergeben sich in Achsnähe Differenzen zwischen Messung und Rechnung, weil dort die gemessene Geschwindigkeit im Gegensatz zu den Rechnungen von Null verschieden ist. Im Unterschied zur Position $x = 240 \text{ mm}$ ist die gemessene Geschwindigkeit hier positiv. Im Außenbereich stimmen Messung und Rechnungen gut miteinander überein. In beiden Fällen wird eine verschwindende Radialkomponente festgestellt.

Bild 5.14 zeigt die Verteilung der mittleren Tangentialgeschwindigkeit in der Modellbrennkammer. An der ersten Messebene in der Modellbrennkammer bei $x = 40 \text{ mm}$ befindet sich ein ausgeprägtes Maximum der bezogenen mittleren Tangentialgeschwindigkeit bei etwa $r/R = 0,19$. Der Ort des Maximums entspricht etwa dem mittleren Radius des Einlasses von $r_m/R = 0,178$. Die Tangentialgeschwindigkeit nimmt sowohl zur Mittelachse als auch zur Außenwand hin ab. Nach Außen hin liegt die bezogene Tangentialgeschwindigkeit bei $W/U_{ref} = 0,2$. Auch in unmittelbarer Nähe zur geometrischen Mittelachse ist noch eine bezogene Tangentialgeschwindigkeitskomponente von $W/U_{ref} = 0,3$ messbar. Bei der nächsten Messebene, die sich in einem Abstand von $x = 80 \text{ mm}$ vom Einlass

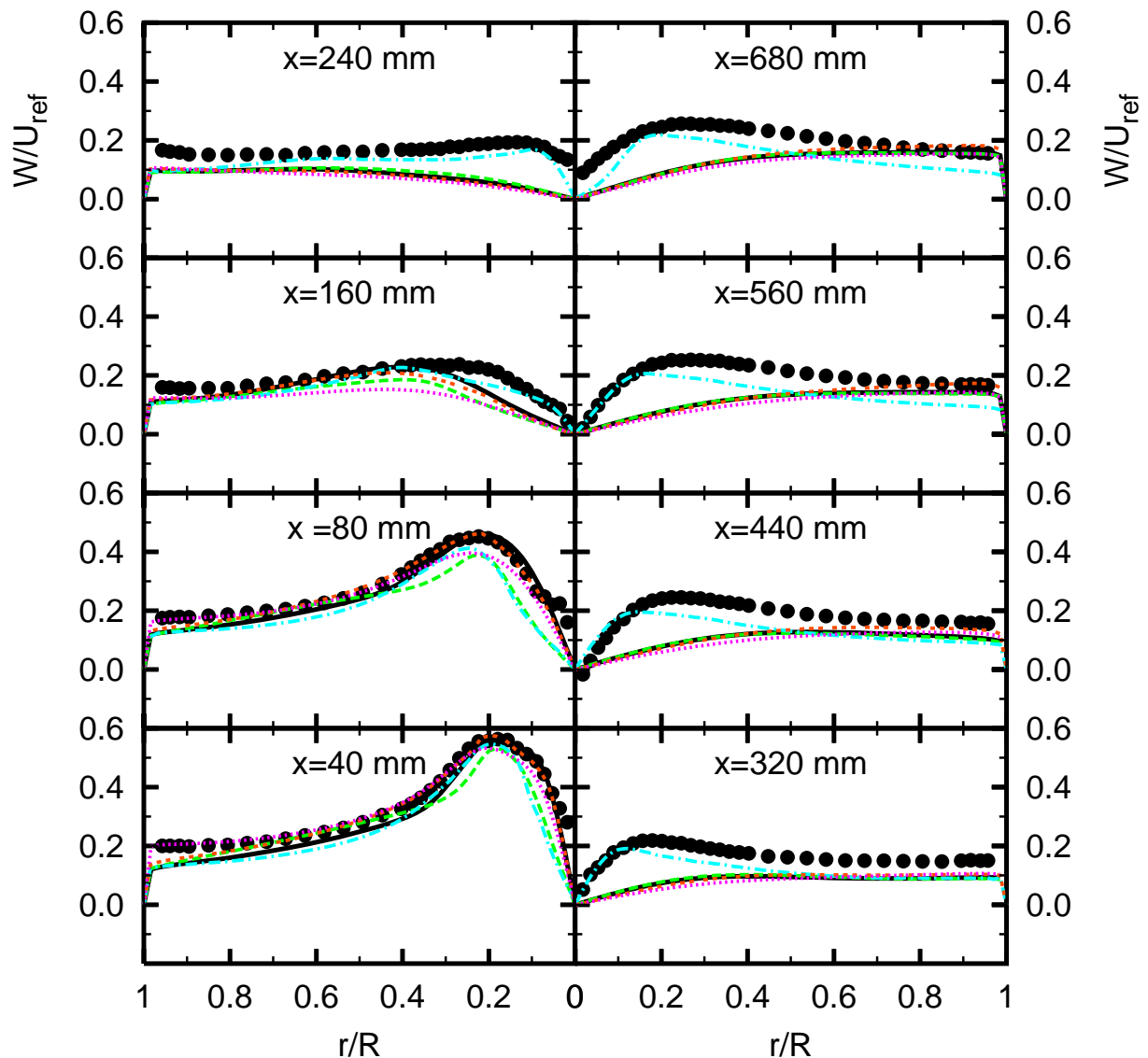


Bild 5.14: Mittlere Tangentialgeschwindigkeit W . Symbole: Exp.: \bullet $k-\epsilon$: —, $k-\omega$: — —, QLM: \cdots , ASM: - · - ·, LRR: - - -

befindet, ist ein ähnliches Bild zu beobachten. Das Geschwindigkeitsmaximum hat sich leicht nach außen hin verlagert und sich dabei etwas abgeschwächt (von $W/U_{ref} = 0,58$ auf $W/U_{ref} = 0,46$). Es wird erkennbar, dass der Drehimpuls der Strömung auf dem Weg zur Außenwand annähernd konstant bleibt ($W \cdot r = const$). Im Abstand $x = 160\text{ mm}$ hat sich das Geschwindigkeitsmaximum bereits auf $W/U_{ref} = 0,22$ reduziert und dabei stark verbreitert. Der Achsenabstand des Maximums hat sich mit $r/R = 0,21$ leicht vergrößert.

Mit zunehmendem Abstand von der Mittellinie reduziert sich die Tangentialgeschwindigkeit leicht. Sie bleibt im Bereich $0,6 < r/R < 1$ unverändert bei $W/U_{ref} = 0,19$ und liegt nur unwesentlich unter dem Wert an der Stelle $x = 40\text{ mm}$. Das Geschwindigkeitsprofil ist bezüglich des Radius relativ ausgeglichen. An der Messebene $x = 240\text{ mm}$ hat sich das Ge-

geschwindigkeitsmaximum praktisch vollständig abgebaut. Der Abstand des Maximums zur Mittelachse hat sich wieder auf $r/R=0,11$ verringert. Die weitere Vergleichmäßigung des Geschwindigkeitsprofils lässt sich auch anhand der axialen Geschwindigkeitskomponente beobachten (vgl. Bild 5.12). Sie steht in Zusammenhang mit dem Ende der Rezirkulationszone im Bereich zwischen $x = 160\text{ mm}$ und $x = 240\text{ mm}$. Das Fluid strömt zur Mittelachse hin und sorgt für eine ausgeglichene Geschwindigkeitsverteilung mit einem leichten Maximum in Achsnähe.

Anschließend beginnt ein durch ähnliche Geschwindigkeitsprofile an unterschiedlichen axialen Positionen gekennzeichnetes Strömungsgebiet. An der Position $x = 320\text{ mm}$ hat sich das Geschwindigkeitsmaximum im Vergleich zur stromauf befindlichen Position $x = 240\text{ mm}$ wieder leicht verstärkt. Gleichzeitig hat sich der Abstand des Maximums von der geometrischen Mittelachse auf $r/R = 0,19$ vergrößert. Davon ausgehend verringert sich die Geschwindigkeit mit wachsendem Radius bis zu einem Wert von etwa $W/U_{ref} = 0,19$ an der Stelle $r/R=0,6$. Im Bereich $0,6 < r/R < 1$ bleibt dieser Wert praktisch unverändert. An den weiter stromab gelegenen Messpositionen $x = 440, 560, 680\text{ mm}$ ändert sich nur noch sehr wenig an den radialen Geschwindigkeitsverteilungen der Tangentialgeschwindigkeit.

Die Selbstähnlichkeit der Geschwindigkeitsverteilungen lässt sich mit der Wirkung des Taylor-Proudman Theorems erklären (vgl. Kap. 3.4). Danach verschwinden in stark drallbehafteten, reibungsfreien und stationären Strömungen die Geschwindigkeitsgradienten in axialer Richtung (der Achse parallel der Rotationsachse). Der Strömungszustand ist gewissermaßen eingefroren. Die Verteilung der Geschwindigkeit in radialer Richtung wird dann von der Auslassgeometrie bestimmt. Der Ort des Geschwindigkeitsmaximums an der Stelle $x = 680\text{ mm}$ liegt etwa bei $r/R = 0,27$, der mittlere Auslassradius beträgt $r/R=0,29$.

Der Verlauf der Tangentialgeschwindigkeit in diesem Bereich lässt sich gut mit dem in Kapitel 3.1 erwähnten Burgers-Oseen Wirbel vergleichen. Die Gleichung (3.4) des Burger-Oseen Wirbels beschreibt den stetigen Übergang vom Starrkörperwirbel zum Potentialwirbel. Das Gebiet des Starrkörperwirbels mit seinem linearen Anstieg der Tangentialgeschwindigkeit mit zunehmendem Radius ist im Bereich $r/R < 0,2$ zu beobachten. Es schließt sich ein Übergangsbereich zum Potentialwirbel mit dem Geschwindigkeitsmaximum an. Der Potentialwirbel beginnt in etwa bei $r/R = 0,35$ und reicht bis zur Außenwand. Dort ist die Geschwindigkeit dem Radius umgekehrt proportional.

Der Vergleich der berechneten Geschwindigkeitsverteilungen mit den gemessenen Verteilungen zeigt bei der Tangentialgeschwindigkeit einen merklichen Unterschied zwischen den Wirbelviskositätsmodellen und dem Reynolds-Spannungsmodell. Die Übereinstimmung des Reynolds-Spannungsmodells mit den experimentellen Ergebnissen ist durchweg gut

bis zufrieden stellend, während die Übereinstimmung der mit den Wirbelviskositätsmodellen berechneten Tangentialgeschwindigkeitsverteilungen mit zunehmendem Abstand vom Brennkammereinlass nachlässt. Im Bereich der Rezirkulationszone ist eine noch hinreichend gute Übereinstimmung zwischen Rechnung und Messung vorhanden. Insbesondere das k - ϵ und das QLM Modell zeigen eine sehr gute Übereinstimmung zu den Messergebnissen. Ab der Position $x = 160 \text{ mm}$ ist im achsnahen Bereich eine merkliche Abweichung feststellbar. Der Außenbereich der Strömung wird noch mit guter Übereinstimmung berechnet. Weiter stromab fällt die Tendenz der Wirbelviskositätsmodelle zur Berechnung eines Starrkörperwirbels auf. Die Modelle unterscheiden sich kaum noch voneinander.

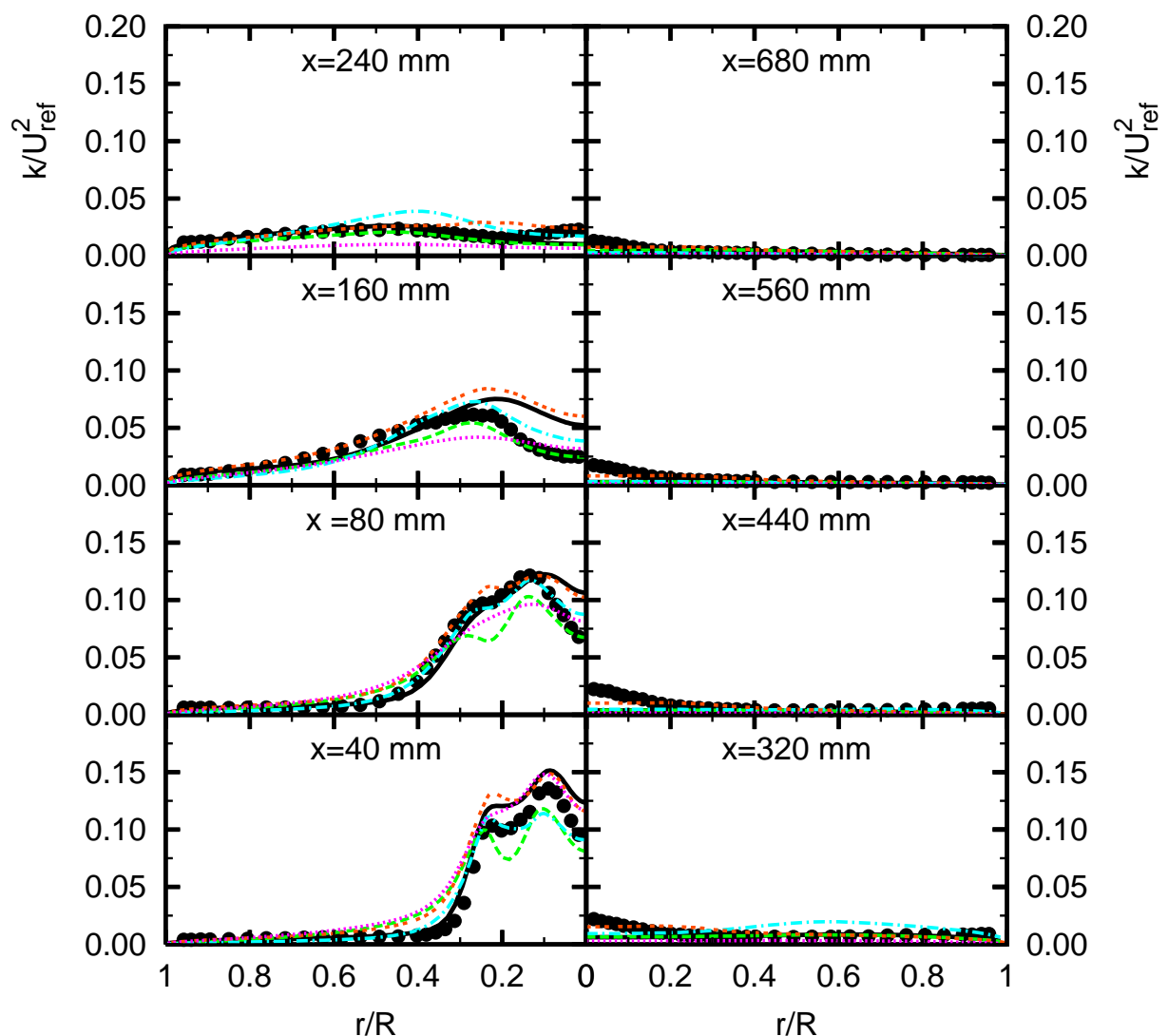


Bild 5.15: Turbulente kinetische Energie. Symbole: Exp.:● k - ϵ :—, k - ω :—, QLM:····, ASM:— · —, LRR:— · —

Bild 5.15 zeigt die Verteilung der turbulenten kinetischen Energie in der Brennkammer. Wie bei den mittleren Strömungsgrößen gesehen ist die Verteilung der turbulenten kinetischen Energie stark von der Rezirkulationszone beeinflusst. Hinter der Rezirkulationszone

klings die turbulente kinetische Energie im gesamten Strömungsquerschnitt relativ schnell ab. Im Gegensatz zu den mittleren Strömungsgrößen ist bei der turbulenten kinetischen Energie jedoch kein Einfluss der Auslassgeometrie wahrnehmbar.

An der ersten betrachteten Messebene hinter dem Brennkammereinlass bei $x = 40 \text{ mm}$ finden sich die höchsten Werte von k . Das Maximum liegt bei $r/R = 0,1$ mit $k/U_{ref}^2 = 0,14$. Daneben befindet sich bei $r/R = 0,22$ noch ein lokales Maximum der turbulenten kinetischen Energie mit $k/U_{ref}^2 = 0,11$. Mit zunehmendem Achsabstand fällt die Verteilung von k sehr schnell auf annähernd Null ab.

Weiter stromab bei $x = 80 \text{ mm}$ hat sich das Maximum auf $k/U_{ref}^2 = 0,125$ verringert. Es hat sich mit $r/R = 0,12$ etwas weiter zur Außenwand verlagert. Das lokale Maximum hat sich ebenfalls verringert und nach außen hin verlagert. An der Stelle $x = 160 \text{ mm}$ hat sich das Maximum im Vergleich zum Wert bei $x = 80 \text{ mm}$ auf $k/U_{ref}^2 = 0,06$ halbiert. Sein Achsabstand beträgt $r/R = 0,28$ und hat sich damit mehr als verdoppelt. Das lokale Maximum ist bei $x = 160 \text{ mm}$ nicht mehr erkennbar.

An der Position $x = 240 \text{ mm}$ ist die Verteilung der turbulenten kinetischen Energie annähernd ausgeglichen. Das Maximum von k hat sich fast vollständig abgebaut. Es beträgt $k/U_{ref}^2 = 0,02$ und befindet sich an der radialen Position $r/R = 0,5$. Weiter stromab bei $x = 320 \text{ mm}$ ist das Maximum vollständig verschwunden. Lediglich an der Mittelachse ist ein leicht erhöhter Wert von $k/U_{ref}^2 = 0,02$ zu erkennen. Davon abgesehen ist die turbulente kinetische Energie im gesamten Radiusbereich praktisch abgeklungen. An dieser Situation ändert sich an den weiter stromab gelegenen Positionen nichts mehr.

Ein Vergleich der Verteilungen der mittleren Geschwindigkeiten u und w mit k an der Stelle $x = 40 \text{ mm}$ zeigt, dass die Orte der größten turbulenten kinetischen Energie mit den ausgeprägtesten Gradienten der mittleren Geschwindigkeit zusammenfallen. Der Beitrag der Geschwindigkeitskomponente v ist weniger deutlich ausgeprägt.

Dies lässt sich anhand der Transportgleichung der turbulenten kinetischen Energie (2.36) nachvollziehen. Dominieren wie im vorliegenden Fall in diesem Teil des Strömungsfelds die Transportmechanismen Konvektion und Produktion gegenüber Prozessen wie Diffusion und Dissipation, ist die turbulente kinetische Energie primär vom mittleren Strömungsfeld bestimmt. Der Produktionsterm von k hängt größtenteils von den Gradienten der mittleren Strömungsgeschwindigkeiten ab, der Konvektionsterm beschreibt den Transport von k durch die mittlere Strömung.

Weiter stromab bei $x = 80 \text{ mm}$ ergibt sich ein analoges Bild. Die Verteilung von k kann anhand der Verteilungen der Geschwindigkeitskomponenten für u und w nachvollzogen werden. Dabei ergibt sich auch eine mögliche Erklärung für das weniger ausgeprägte lokale

Maximum von k . Während die mittleren Geschwindigkeiten von u und w zur Mittelachse hin jeweils verschwinden (müssen) und somit für in etwa gleich bleibende Gradienten sorgen, überlagern sich die Geschwindigkeitskomponenten nach außen hin so, dass ein weniger steiler Geschwindigkeitgradient resultiert. Daraus ergibt sich eine weniger stark ausgeprägte Produktion der turbulenten kinetischen Energie. Zudem sorgt die Konvektion dafür, dass die stromauf gemessene Verteilung von k stromab transportiert wird.

Wie bereits erwähnt ist an der Stelle $x = 160 \text{ mm}$ das zweite Maximum von k verschwunden. Mit der kleiner werdenden Produktion von k erlangen die verbleibenden Transportmechanismen zunehmende Bedeutung. Die Dissipation sorgt für einen generellen Abbau von k , die Diffusion bewirkt eine Umverteilung hin zur größeren Gleichverteilung von k , indem Gradienten von k abgebaut werden. Als Folge wird das Maximum verbreitert und gleichzeitig zunehmend abgebaut.

Weiter stromab ist lediglich an der Mittelachse ein gewisser Anstieg der turbulenten kinetischen Energie zu verzeichnen. Er resultiert aus dem nicht verschwindenden Gradienten der Tangentialkomponente w . Ansonsten findet keine Produktion von k mehr statt. Die turbulente kinetische Energie klingt weiter ab.

Der Vergleich der berechneten Verteilungen der turbulenten kinetischen Energie mit den gemessenen Verteilungen zeigt insgesamt eine gute Übereinstimmung. An der Stelle $x = 40 \text{ mm}$ sagen alle eingesetzten Turbulenzmodelle die Orte der beiden Maxima richtig voraus. Bis auf das ASM Modell berechnen auch alle Modelle die Ausprägung der Maxima qualitativ richtig. Das k - ϵ sowie das QLM Modell überschätzten das Maximum leicht, während es die anderen Modelle leicht unterschätzen. Entsprechend wird das lokale Maximum vom k - ϵ Modell ebenfalls leicht überschätzt, da es das Verhältnis von Maximum zum lokalen Maximum richtig wiedergibt. Das QLM Modell sagt die Höhe des lokalen Maximums richtig voraus. Die anderen Modelle stimmen ebenfalls sehr gut mit dem gemessenen lokalen Maximum überein. Sie geben das relative Verhältnis beider Maxima zueinander anders wieder, da das lokale Maximum im Vergleich zum Maximum etwas zu hoch berechnet wird. Beim ASM Modell werden umgekehrte Verhältnisse berechnet. Das lokale Maximum wird überschätzt und damit zum absoluten Maximum. Das k - ω sagt noch ein ausgeprägtes Minimum zwischen beiden Maxima voraus, das so nicht gemessen wurde.

An der Stelle $x = 80 \text{ mm}$ zeigen das RSM und das k - ϵ Modell eine sehr gute Übereinstimmung mit den Messwerten. Lediglich der Abfall von k vom Maximum zur Mittelachse fällt beim k - ϵ Modell etwas zu gering aus. Beim QLM Modell ist das lokale Maximum nicht mehr erkennbar. Insgesamt wird das Niveau der turbulenten kinetischen Energie unterschätzt. Umgekehrt überschätzt das ASM Modell das Niveau von k . Das lokale Maximum wird ebenfalls nicht mehr wiedergegeben.

Bei $x = 160 \text{ mm}$ ist das lokale Maximum auch in den Messungen verschwunden. Hier zeigen das k - ω sowie das RSM Modell die beste Übereinstimmung mit den Messwerten. Das QLM Modell unterschätzt das Niveau von k weiterhin etwas, das ASM Modell trifft das Niveau hingegen recht gut.

Ab der Position $x = 240 \text{ mm}$ ist die Verteilung der turbulenten kinetischen Energie bereits relativ ausgeglichen. Dies wird von den Turbulenzmodellen qualitativ korrekt wiedergegeben. Das RSM überschätzt das Niveau von k etwas, das QLM Modell unterschätzt es dagegen. Das ASM Modell sagt einen leichten Anstieg von k im Bereich der Mittelachse voraus, der auch an allen weiter stromab befindlichen Positionen zu finden ist. Der Anstieg ist auch messtechnisch feststellbar. Unterschiede gibt es in der Ausprägung des Anstiegs. Das ASM Modell berechnet ein konstantes Niveau von k vor dem Abfall auf annähernd Null. Die Messergebnisse zeigen dieses Plateau nicht. Das Absinken findet sofort statt. Alle anderen Turbulenzmodelle sagen den Anstieg von k in der Nähe der Mittelachse nicht voraus.

Insgesamt kann die Übereinstimmung zwischen berechneten und gemessenen Verteilungen der Strömungsgrößen als mittelmäßig bezeichnet werden. Während bei den Axialgeschwindigkeitsverteilungen noch von einer insgesamt guten Übereinstimmung zwischen Rechnung und Messung gesprochen werden kann, gilt dieser Befund nicht mehr für die berechneten Tangentialgeschwindigkeitsverteilungen. Hier zeigt sich deutlich die Tendenz linearer Wirbelviskositätsmodelle, unabhängig vom tatsächlichen Verlauf den Geschwindigkeitsverlauf eines Starrkörperwirbels zu berechnen. Dieser Befund trifft auch auf die eingesetzten nichtlinearen Modelle QLM und ASM zu. Einzig das Reynolds-Spannungsmodell LRR kann den gemessenen Tangentialgeschwindigkeitsverlauf zumindest qualitativ korrekt wiedergeben. Allerdings ergaben sich mit diesem Modell umgekehrt auch teilweise größere Abweichungen zum gemessenen Axialgeschwindigkeitsverlauf als mit den Wirbelviskositätsmodellen. Leichte Verbesserungen hinsichtlich des Übereinstimmungsgrads im Vergleich zu den Tangentialgeschwindigkeitsverläufen sind bei der mittleren Radialgeschwindigkeitskomponente sowie der turbulenten kinetischen Energie zu verzeichnen. Durch den Einsatz der nichtlinearen Wirbelviskositätsmodelle ergibt sich in diesem Fall kein genereller Trend zu einer verbesserten Vorhersagegüte. Selbst das LRR Modell ist nicht uneingeschränkt zu empfehlen.

5.4 Strahlreiheneinblasung in verdrallte Querströmung

Das Strömungsfeld in Gasturbinenbrennkammern, das sich bei der Vermischung von Sekundärluft mit dem Primärmassenstrom einstellt, ist sehr komplex. Es entsteht durch die Einblasung von Sekundärluft aus einer Vielzahl von Bohrungen der Flammrohrwand in den verdrallten Hauptmassenstrom. Mit der Sekundärlufteinblasung soll zum einen über

eine rasche und vollständige Vergleichmäßigung des Gemischs ein möglichst hoher Ausbrandgrad erreicht und die Bildung von Schadstoffen wie Stickoxiden (NO_x) vermieden werden. Zum anderen dient die Einblasung der Kühlung der Flammrohrwand und der Erzeugung eines geeigneten Temperaturprofils am Brennkammeraustritt, um die thermische Belastung für die hinter der Brennkammer angeordnete Turbine zu optimieren.

5.4.1 Versuchsaufbau und Diskretisierung

Der für die numerischen Berechnungen betrachtete Fall einer Strahlreiheneinblasung in eine drallbehaftete Hauptströmung wurde von Krautkremer [28] am Brennkammerprüfstand des Fachgebiets Gasturbinen und Flugantriebe der TU Darmstadt experimentell untersucht.

Der in Bild 5.16 dargestellte Versuchsaufbau ist ein idealisiertes Modell eines gasturbinentypischen Ringbrennkammersegments. Es besteht aus drei parallelen Kanälen mit rechteckigem Strömungsquerschnitt. Die Kanäle sind übereinander angeordnet und durch zwei Bleche der Stärke 2 mm voneinander getrennt, die die Flammrohrwand einer realen Brennkammer nachbilden. Die in realen Ringbrennkammern vorhandene Krümmung in Umfangsrichtung wurde zugunsten einer einfacheren Geometrie mit verbessertem optischen Zugang vernachlässigt. Alle Kanäle haben eine Breite von $b = 300\text{ mm}$. Der mittlere Kanal repräsentiert die Flammrohrinnenströmung und hat eine Gesamthöhe von $h = 100\text{ mm}$. Die verbleibenden zwei Kanäle haben eine Höhe von je $h_N = 65\text{ mm}$, die von der Flammrohraußenströmung durchströmt werden. An der Stirnplatte des mittleren Kanals sind drei Drallerzeuger in einem Abstand von $t = 100\text{ mm}$ zueinander angeordnet. Sie erzeugen die verdrehte Innenströmung mit einem mittleren Massenstrom von $\dot{m}_H = 0,047\text{ kg/s}$ pro Düse. Durch die beiden Nebkanäle strömt ein Luftmassenstrom von insgesamt $\dot{m}_N = 0,094\text{ kg/s}$. In einem Abstand von $f = 75\text{ mm}$ stromab der Stirnseite befindet sich eine Reihe von Bohrungen mit einem Durchmesser von $d = 10\text{ mm}$ in den Trennblechen zwischen den drei Kanälen. Grundsätzlich ist eine Variation der Größe, Anzahl und Anordnung der Lochgeometrie möglich, da ein Schwerpunkt der experimentellen Untersuchungen in der Ermittlung des Einflusses dieser Größen auf das Mischungsverhalten war. Für den hier betrachteten Fall hatten die Bohrungen untereinander einen Abstand von $s = 25\text{ mm}$. Durch sie strömt die Sekundärluft und vermischt sich mit dem verdrehten Hauptmassenstrom. Die Messstrecke hat eine Gesamtlänge von $L = 600\text{ mm}$. Alle drei Massenströme gelangen über Beruhigungskammern in die Messstrecke.

Zur experimentellen Ermittlung des Mischungsfelds wird unter Ausnutzung der in Abschnitt 2.2.4 beschriebenen Wärme-Stoff Analogie der Hauptmassenstrom thermisch markiert und das sich durch die Vermischung mit der kälteren Sekundärluft ergebende Temperaturfeld bestimmt. Die Temperatur des Hauptmassenstroms beträgt $T_H = 325\text{ K}$, die Temperatur der Nebenströme liegt bei $T_N = 300\text{ K}$. Als weiteres experimentelles Verfah-

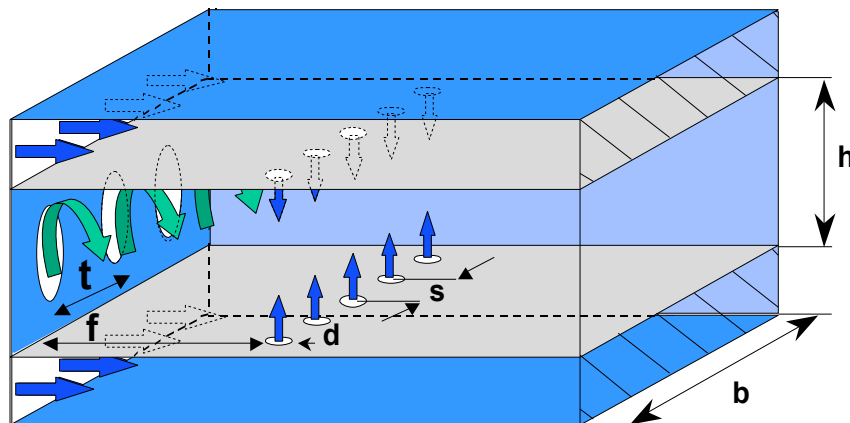


Bild 5.16: Versuchsaufbau der Brennkammer

ren zur Mischungsbestimmung wurde das Laser-Lichtschnitt Verfahren verwendet. Einzelheiten hierzu sind [28] zu entnehmen. Das Geschwindigkeitsfeld der hier beschriebenen Konfiguration wurde mit Hilfe der Laser-Doppler Anemometrie bestimmt. Details zur Vorgehensweise sind bei [23] zu finden. Die in einem Abstand $a = 6\text{ mm}$ stromab der Stirnseite der Modellbrennkammer gemessene Geschwindigkeitsverteilung kann als Eintrittsrandbedingung für numerische Berechnungen herangezogen werden. Auf eine Einbeziehung der Strömung in den Drallerzeugern wurde zum einen wegen der begrenzten Hardwareressourcen verzichtet. Zum anderen ließen Voruntersuchungen zur Berechnung der Strömung durch Drallerzeuger nicht auf eine Verbesserung des Gesamtergebnisses schließen.

Zur Strömungsberechnung wurden sowohl der Haupt- als auch die beiden Nebenchäle diskretisiert. Die Gesamtbreite des diskretisierten Berechnungsgebiets entspricht der geometrischen Erstreckung der Modellbrennkammer. Das Berechnungsgebiet beginnt an der Stirnseite des Mischkammerprüfstands und endet $0,15\text{ m}$ stromab. Das 6 mm stromab der Stirnplatte vermessene Geschwindigkeitsprofil wird als Eintrittsrand verwendet. Bild 5.17 zeigt einen Ausschnitt des Berechnungsgebiets ohne die darüber und darunter befindlichen Nebenchäle sowie ohne die beiden links und rechts befindlichen zusätzlichen Drallerzeugersegmente. Der Einlassbereich ist in Bild 5.17 blau dargestellt, die Auslassebene rot. Die Form des Einlassrandes ergibt sich aus der experimentellen Traversierung des Geschwindigkeitsprofils sowohl in radialer Richtung im Bereich $0\text{ mm} \leq r \leq 18,5\text{ mm}$ sowie der Strecke $0\text{ mm} \leq x \leq 6\text{ mm}$ in axialer Richtung an der Position $r = 18,5\text{ mm}$, wenn man den Koordinatenursprung auf den Mittelpunkt der stirnseitigen Wand legt. Eine solche Traversierung ist notwendig, da der aus dem verwendeten Air-Blast Drallerzeuger kommende Massenstrom dem Krümmungsradius der Drallerzeugerdüse folgend entlang der Stirnwand radial nach außen strömt. Damit ergibt sich der in Bild 5.17 blau dargestellte scheibenförmige Einlassrand. Das Gesamtgitter umfasste $1,6 \cdot 10^6$ Gitterpunkte.

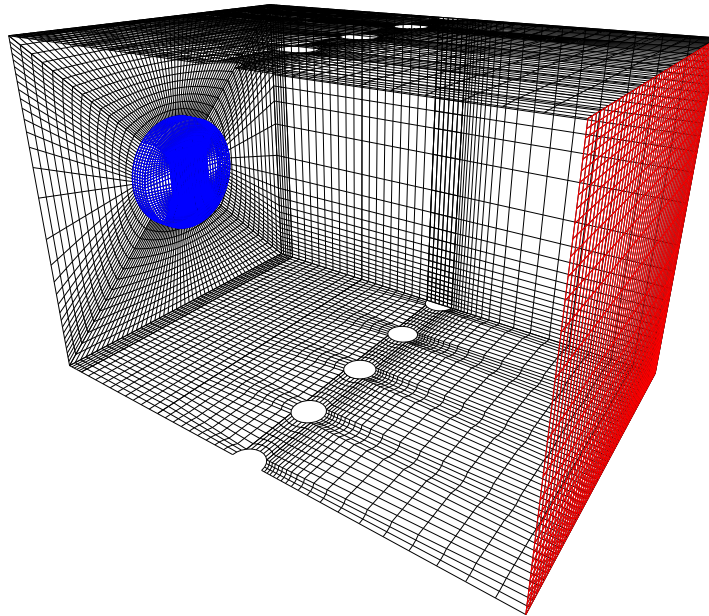


Bild 5.17: Diskretisierung des Mittelsegments des Brennkammerhauptkanals

Die verwendeten Randbedingungen sind *inlet*, *opening* und *wall*. An den Einlässen der Seitenkanäle wurden konstante Werte für die mittlere Geschwindigkeit ($U = 2,3 \text{ m/s}$), die Temperatur ($T = 300 \text{ K}$) und die turbulenten Größen ($Tu = 0,05$, $\frac{\nu_t}{\nu} = 10$) vorgeschrieben. Am Einlassrand des Hauptkanals werden Profilrandbedingungen für das turbulente Geschwindigkeitsfeld und eine konstante Temperatur $T = 325 \text{ K}$ vorgegeben. Am Auslass wird ein konstanter Druck $p = 1,0 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ angenommen. Falls Fluid an dieser Stelle einströmt, entspricht der Wert dem Totaldruck und es wird ein konstanter Turbulenzgrad $Tu = 0,05$ und für die Dissipation $\frac{\nu_t}{\nu} = 10$ vorgeschrieben. Alle verbleibenden Flächen werden als feste Wände mit Standard Wandfunktionen modelliert.

5.4.2 Darstellung der Ergebnisse

Der Ursprung des Koordinatensystems liegt, wie in Bild 5.18 dargestellt, in der geometrischen Mitte der mittleren Drallerzeugerdüse am Eintritt in das Mischkammermodul. Die x -Koordinate beschreibt die Horizontalerstreckung der Mischkammer und damit die Richtung der mittleren Hauptströmung u . Die x -Koordinate wird mit dem Abstand $f = 75 \text{ mm}$ dimensionslos gemacht, der den Abstand zwischen der Stirnseite der Mischkammer und dem Ort der Sekundärlufteinblasung angibt. Die diskretisierte Mischkammer beginnt bei $x/f = 0$ und endet bei $x/f = 2$. Die y -Koordinate bezeichnet die Breitenerstreckung der Kammer. Durch die Wahl des Koordinatenursprungs beginnt die Mischkammer bei $y_{min} = -\frac{b}{2}$ und endet bei $y_{max} = \frac{b}{2}$. Für die in den nachfolgenden Bildern gezeigten Ge-

schwindigkeitsverteilungen wurde alternativ die Teilung t zwischen zwei Drallerzeugern als geometrische Bezugsgröße benutzt ($b = 3t$). Entsprechend bezeichnet dann die Länge $y = \frac{t}{2}$ die geometrische Mitte zwischen dem mittleren und den äußeren Drallerzeugern. Die z -Koordinate gibt die Vertikalerstreckung des Mischkammermoduls an. Der Hauptkanal hat eine Höhe von $h = 100 \text{ mm}$. Er beginnt bei $z_{\min} = -\frac{h}{2}$ und endet bei $z_{\max} = \frac{h}{2}$.

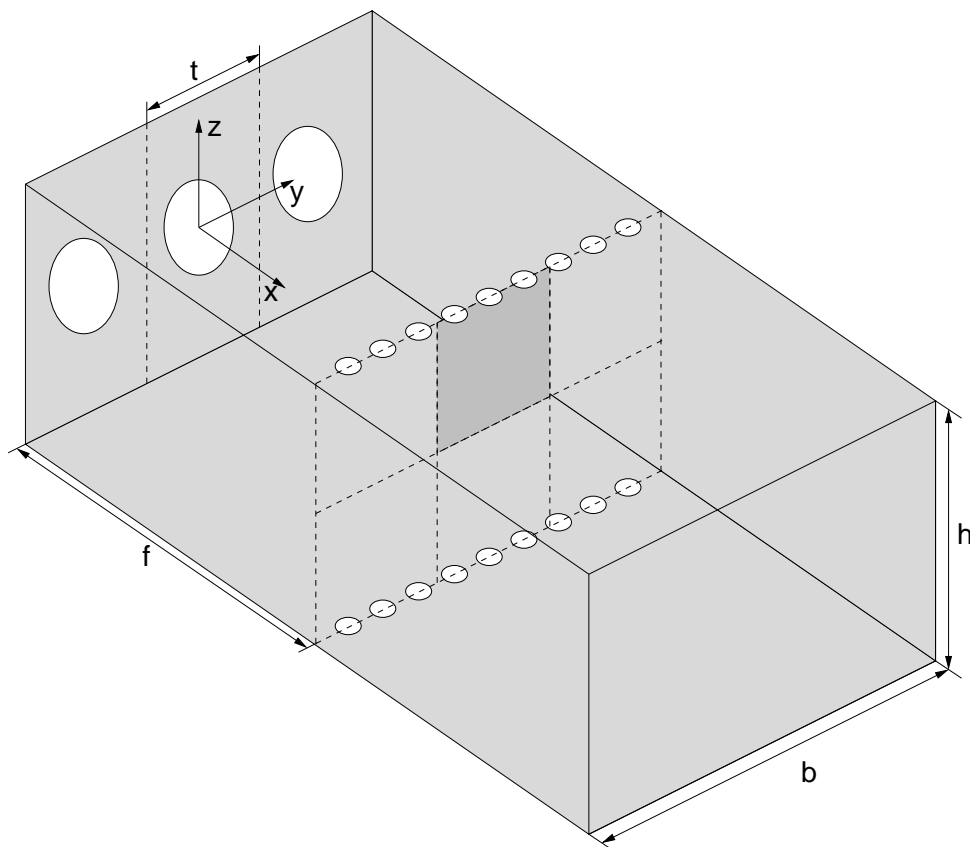


Bild 5.18: Koordinatensystem des Mischkammermoduls

Zum besseren Verständnis der nachfolgend dargestellten Geschwindigkeitsverteilungen ist in Bild 5.18 beispielhaft der Bereich für die Ebene $x/f = 1$ dargestellt, der von den Bildern 5.20 bis 5.23 abgedeckt wird. Innerhalb einer Ebene sind die Geschwindigkeiten in Abhängigkeit der y -Koordinate im Bereich $y = \pm \frac{t}{2}$ aufgetragen. Durch Variation der Vertikalkoordinate z/h ergibt sich das in Bild 5.18 angedeutete Ebenensegment.

Zuvor ist in Bild 5.19 die gemessene Totaldruckverteilung der Ebene $x/f = 0,16$ dargestellt (siehe [28]). Es vermittelt einen ersten Gesamteindruck des Strömungsgeschehens im Primärzonenbereich des Mischkammermoduls. Dargestellt ist die Totaldruckverteilung im Bereich des mittleren Drallerzeugersegments sowie je eine Hälfte der beiden angrenzenden Drallerzeugersegmente. Die in Bild 5.19 rot eingefärbten Gebiete repräsentieren Bereiche hohen Totaldrucks, grün und blau dargestellte Gebiete sind Bereiche niedrigen Totaldrucks. Bereiche niedrigen Totaldrucks kennzeichnen Rückströmgebiete.

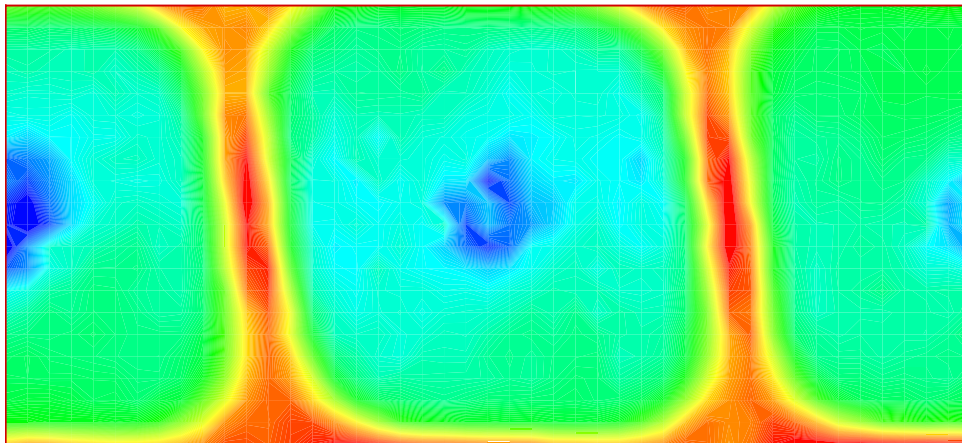


Bild 5.19: Gemessene Totaldruckverteilung der Ebene $x/f = 0,16$.

Anhand der gemessenen Totaldruckverteilung wird deutlich, dass sich in diesem Bereich der Mischkammer die Rückströmgebiete über große Teile des Strömungsquerschnitts der Mischkammer erstrecken.

Die Ursache hierfür ist in der durch die Formgebung des Drallerzeugers hervorgerufenen wandanliegenden Strömung zu suchen. Wegen der abgerundeten Auslassgeometrie strömt das verdrehte Fluid am Eintritt in das Mischkammermodul zunächst primär radial nach außen. Es wird dann zum einen durch die Begrenzungswände des Mischkammermoduls und im Inneren durch die benachbarten Drallerzeuger in die axiale Hauptströmungsrichtung umgelenkt. So ergeben sich zu Beginn zwei relativ schmale Bänder hohen Totaldrucks, die durch die Wirkung der Umfangsgeschwindigkeitskomponente gegenüber den seitlichen Begrenzungsflächen des Mischkammermoduls geneigt sind.

In Bild 5.20 sind die Verteilungen der Horizontalgeschwindigkeit an den beiden Ebenen $x/f = 0,25$ und $x/f = 0,5$ dargestellt. In der unteren Bildhälfte ist die Geschwindigkeitsverteilung der Ebene $x/f = 0,25$ zu sehen. Im Mittelbereich bei $z/h = 0 - 0,2$ ist anhand der experimentell gemessenen Geschwindigkeitsverteilungen deutlich der mit negativen Horizontalgeschwindigkeiten gekennzeichnete Bereich der Rezirkulationszone erkennbar. Wie bereits in Bild 5.19 gesehen, ist der Bereich der positiven Horizontalgeschwindigkeit auf den schmalen Bereich zwischen zwei nebeneinander liegenden Drallerzeugern ($y/t \geq 0,4$ bzw. $y/t \leq 0,4$) beschränkt. Die allgemeine Charakteristik der Geschwindigkeitsverteilung der Ebene $x/f = 0,25$ hat sich im Vergleich zu der in Bild 5.19 gezeigten Charakteristik der Strömung in der etwas weiter stromauf gelegenen Ebene $x/f = 0,16$ wenig verändert. Mit größer werdenden Werten z/h wird der Einfluss der seitlichen Trennbleche (die sich bei $z/h = \pm 0,5$ befinden) und der Drallkomponente sichtbar. Sie führen zu einer Verschiebung des Geschwindigkeitsminimums zu positiven y/t Werten. Neben den Messergebnissen sind in Bild 5.20 die mit fünf verschiedenen Turbulenzmodellen erzielten Ergebnisse dargestellt. Da bei diesem Testfall mit dem Reynolds-Spannungsmodell LRR

keine konvergenten Lösungen erzielt werden konnten, werden die mit dem SST Modell (vgl. Kapitel 2.4.4) berechneten Ergebnisse vorgestellt. Im Mittelbereich ($z/h = 0 - 0,2$) der Ebene $x/f = 0,25$ können alle eingesetzten Turbulenzmodelle die gemessene Rezirkulationszone korrekt wiedergeben. Leichte Abweichungen sind an den Rändern im Bereich der positiven Horizontalgeschwindigkeiten zu verzeichnen. Auch wird die Verlagerung des Geschwindigkeitsminimums nicht korrekt wiedergegeben.

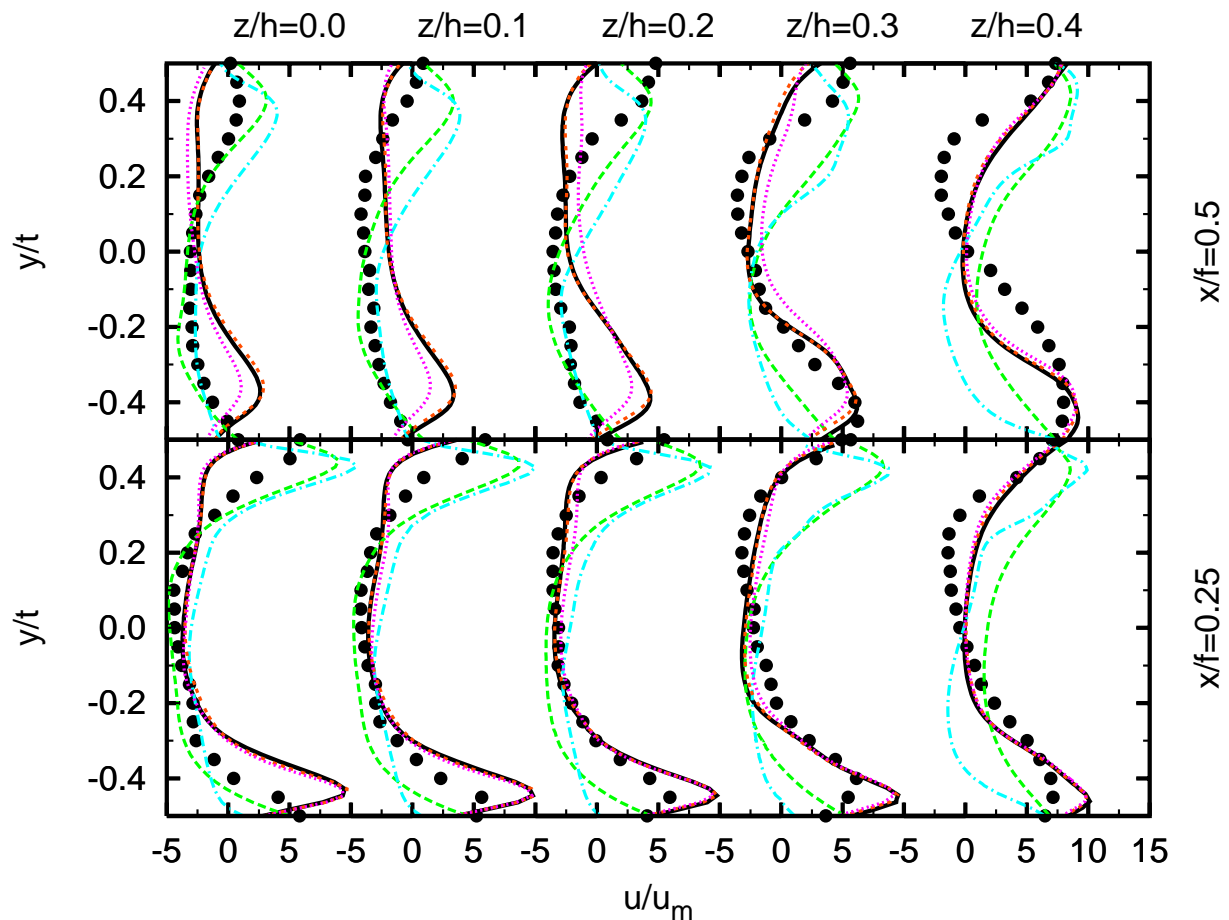


Bild 5.20: Horizontalgeschwindigkeiten der Ebenen $x/f = 0,25$ und $x/f = 0,5$.

Symbole: Exp.:●, $k-\epsilon$:—, $k-\omega$:— —, QLM:· · ·, ASM:— · —, SST:— — —

Die Horizontalgeschwindigkeiten der weiter stromab gelegenen Messebene $x/f = 0,5$ sind in der oberen Bildhälfte von Bild 5.20 dargestellt. Im Vergleich zur ersten Messebene bei $x/f = 0,25$ hat sich die Charakteristik der gemessenen Geschwindigkeitsverteilungen leicht geändert. Der Bereich der zentralen Rezirkulationszone ist nach wie vor in ähnlicher Ausprägung und Intensität feststellbar. Der Bereich der positiven Horizontalgeschwindigkeit besteht in diesem Bereich hingegen nicht mehr. Die drallbedingte Verlagerung des Geschwindigkeitsminimums bleibt dagegen bestehen. Die Berechnungsergebnisse für die Messebene $x/f = 0,5$ zeigen insgesamt eine weitere Reduzierung der Übereinstimmung mit den Messwerten. Im Mittelbereich der Messebene ($z/h \leq 0,2$) liefern das $k-\omega$ und das SST eine qualitativ und zum Teil auch quantitativ annehmbare Übereinstimmung

mit den gemessenen Horizontalgeschwindigkeiten. Die bereits in der stromauf gelegenen Ebene $x/f = 0,25$ kaum zufrieden stellende qualitative Übereinstimmung für den wand-nahen Bereich ist folgerichtig wiederum nicht gegeben. Die experimentell festgestellte Verlagerung des Geschwindigkeitsminimums kann durch die Berechnungsergebnisse nicht bestätigt werden.

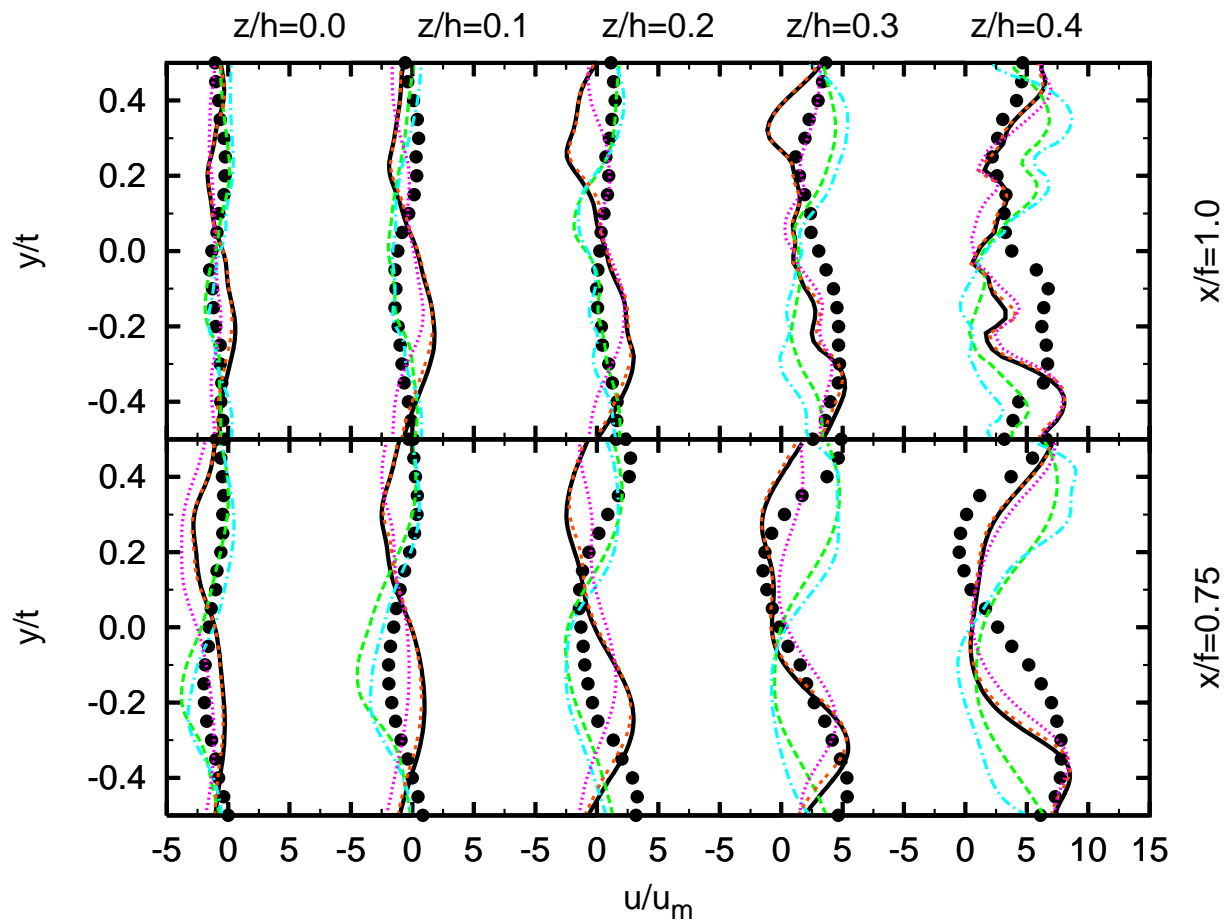


Bild 5.21: Horizontalgeschwindigkeiten der Ebenen $x/f = 0,75$ und $x/f = 1,0$.

Symbole: Exp.: \bullet , $k-\epsilon$: —, $k-\omega$: ---, QLM: \cdots , ASM: - · -, SST: - - -

Bild 5.21 zeigt die Verteilungen der Horizontalgeschwindigkeit der Ebenen $x/f = 0,75$ und $x/f = 1$. Die in der unteren Bildhälfte dargestellten Geschwindigkeitsverteilungen der Ebene $x/f = 0,75$ schreiben den Trend der beiden stromauf gelegenen Ebenen aus Bild 5.20 fort. Im Mittelbereich ist ein schwach ausgeprägtes Rückströmgebiet messbar. Mit zunehmender Distanz zur Mitte des Mischkammermoduls bildet sich das asymmetrisch liegende Geschwindigkeitsminimum aus. Die Lage und die Ausprägung des Minimums bleiben in etwa gleich. Diese Zweiteilung des Strömungsgeschehens wird von keinem der betrachteten Modelle erfasst. Entweder ist die Übereinstimmung der mit einem Turbulenzmodell erzielten Berechnungsergebnisse im Bereich der zentralen Rückströmzone oder aber im Bereich der Trennbleche besser, da die Ausbildung und Verlagerung des Geschwindigkeitsminimums nicht nachvollzogen wird.

In der oberen Hälfte von Bild 5.21 ist die Geschwindigkeitsverteilung der Messebene $x/f = 1$ dargestellt. Wie schon in allen stromauf gelegenen Messebenen gesehen ist im zentralen Strömungsbereich keine nennenswerte Horizontalgeschwindigkeit messbar. Die Ausbildung des asymmetrisch angeordneten Geschwindigkeitsminimums unterbleibt aber diesmal weitgehend. Dies hängt mit den in dieser Ebene stattfindenden Sekundärlufteinblasung zusammen. Die Sekundärlufteinblasung führt zu einem sehr unregelmäßigen Geschwindigkeitsverlauf. Ein Vergleich der Berechnungsergebnisse mit den experimentellen Ergebnissen zeigt die unterschiedliche Tiefenwirkung der Sekundärlufteinblasung. Während bei allen Berechnungsergebnissen die Wirkung der Sekundärlufteinblasung bereits an der Position $z/h = 0,3$ feststellbar ist, ergibt sich ein experimentell wahrnehmbarer Einfluss erst entlang der Traverse $z/h = 0,4$

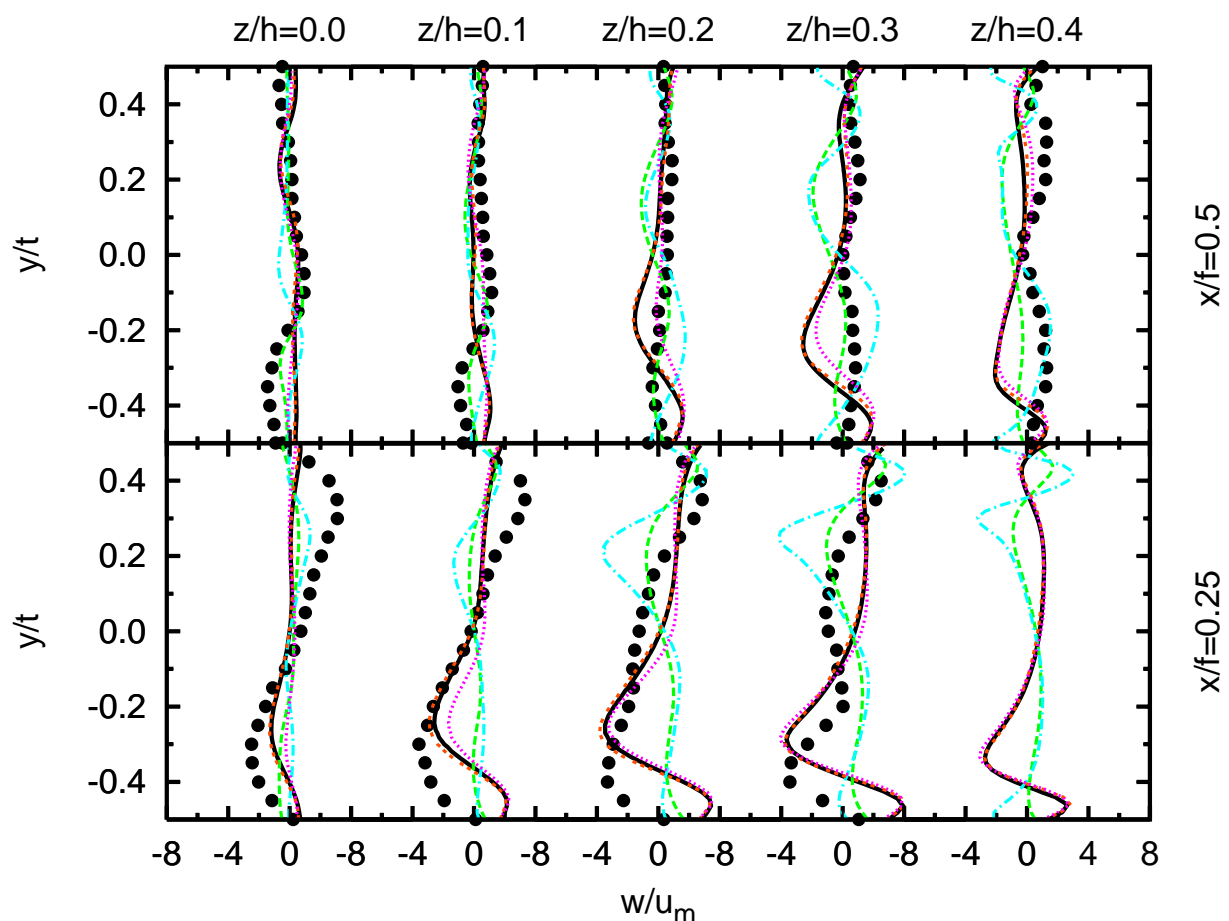


Bild 5.22: Mittlere Vertikalgeschwindigkeit der Ebenen $x/f = 0,25$ und $x/f = 0,5$.

Symbole: Exp.:●, $k-\epsilon$:—, $k-\omega$:---, QLM:⋯, ASM:-.-, SST:-.-

Bild 5.22 zeigt die Verteilungen der Vertikalgeschwindigkeit der Ebenen $x/f = 0,25$ und $x/f = 0,5$. Die zugehörigen Horizontalgeschwindigkeiten der beiden Messebenen sind in Bild 5.20 dargestellt. Anhand des Geschwindigkeitsverlaufs entlang der Mittelebene $z/h = 0$ ist die Drehrichtung der Drallströmung gut erkennbar. Im Bereich positiver y/t -Werte strömt Fluid in positiver z -Richtung, während im Bereich negativer y/t -Werte

die Strömung nach unten gerichtet ist. An dieser generellen Charakteristik ändert sich innerhalb der Ebene wenig. Die Umfangsgeschwindigkeitskomponenten an den beiden Rändern bleiben erhalten. Mit zunehmenden z/h -Werten ist ein Abbau der gemessenen Umfangsgeschwindigkeiten im Mittelbereich zwischen den beiden Rändern feststellbar. Entlang der wandnächsten Traverse bei $z/h=0,4$ konnten aufgrund der dort vorliegenden niedrigen Datenraten keine brauchbaren Messungen durchgeführt werden [22].

Die berechneten Vertikalgeschwindigkeitsverteilungen der Ebene $x/f=0,25$ können die experimentell bestimmten Verteilungen nur unzureichend bestätigen. Insbesondere bei niedrigen z/h -Werten unterschätzen die berechneten Geschwindigkeitsverläufe die gemessenen Umfangsgeschwindigkeiten. Die Interaktion der benachbarten Drallströmungen wird bei den Berechnungen überschätzt, da sich die Umfangsgeschwindigkeiten zweier benachbarter gleichsinnig drehender Drallströmungen drallmindernd auswirken. Die experimentell festgestellte drallmindernde Wirkung fällt wesentlich geringer aus. Mit zunehmendem Abstand von der geometrischen Mitte lassen sich auch bei den numerischen Berechnungsergebnissen nennenswerte Vertikalgeschwindigkeiten konstatieren, wenngleich die Lagen der berechneten und gemessenen Vertikalgeschwindigkeiten zum Teil sehr deutlich voneinander abweichen. Die relativ besten Übereinstimmungen liefern das $k-\epsilon$ und das QLM Modell. Die teilweise starken Abweichungen der anderen Turbulenzmodelle sind auf eine völlig andere Berechnung der Lage und Ausdehnung des Drallzentrums zurückzuführen.

Die Vertikalgeschwindigkeiten der weiter stromab gelegenen Messebene $x/f=0,5$ sind in der oberen Hälfte von Bild 5.22 dargestellt. Im Vergleich zur stromauf gelegenen Ebene $x/f=0,25$ haben sich die aufwärts und die abwärts gerichteten Strömungsbewegungen an den Randbereichen des betrachteten Segments bereits stark vermindert. Lediglich im wandfernen Bereich bei $y/t \approx -0,35$ ist aufgrund des dort befindlichen Minimums der Vertikalgeschwindigkeit eine moderate Abwärtsbewegung erkennbar.

Die zugehörige aufwärts gerichtete Strömungskomponente ist dagegen nicht mehr identifizierbar. An den wandnäheren Messtraversen ab $z/h=0,3$ ist auch das Geschwindigkeitsminimum verschwunden. Stattdessen wurden zwei symmetrisch zur Mitte ($y/t=0$) angeordnete lokale Geschwindigkeitsmaxima gemessen. Dies ist insofern bemerkenswert, da sich demnach lokal aus einem zwei Wirbel gebildet haben müssten. Dies lässt sich anhand der Berechnungsergebnisse nicht verifizieren.

Bild 5.23 zeigt die Geschwindigkeitsverteilungen der Vertikalgeschwindigkeit in den beiden Messebenen $x/f=0,75$ und $x/f=1$. In der unteren Hälfte des Bildes sind die Geschwindigkeitsverteilungen der Ebene $x/f=0,75$ aufgetragen. Zur vollständigen Darstellung der Ergebnisse der Ebene $x/f=1$ wurde in Bild 5.23 der Maßstab der aufgetragenen Geschwindigkeitswerte der x -Achse im Vergleich zu den in Bild 5.22 gezeigten Verteilungen angepasst. Ein Vergleich der Ebene $x/f=0,75$ mit den Ergebnissen der stromauf gele-

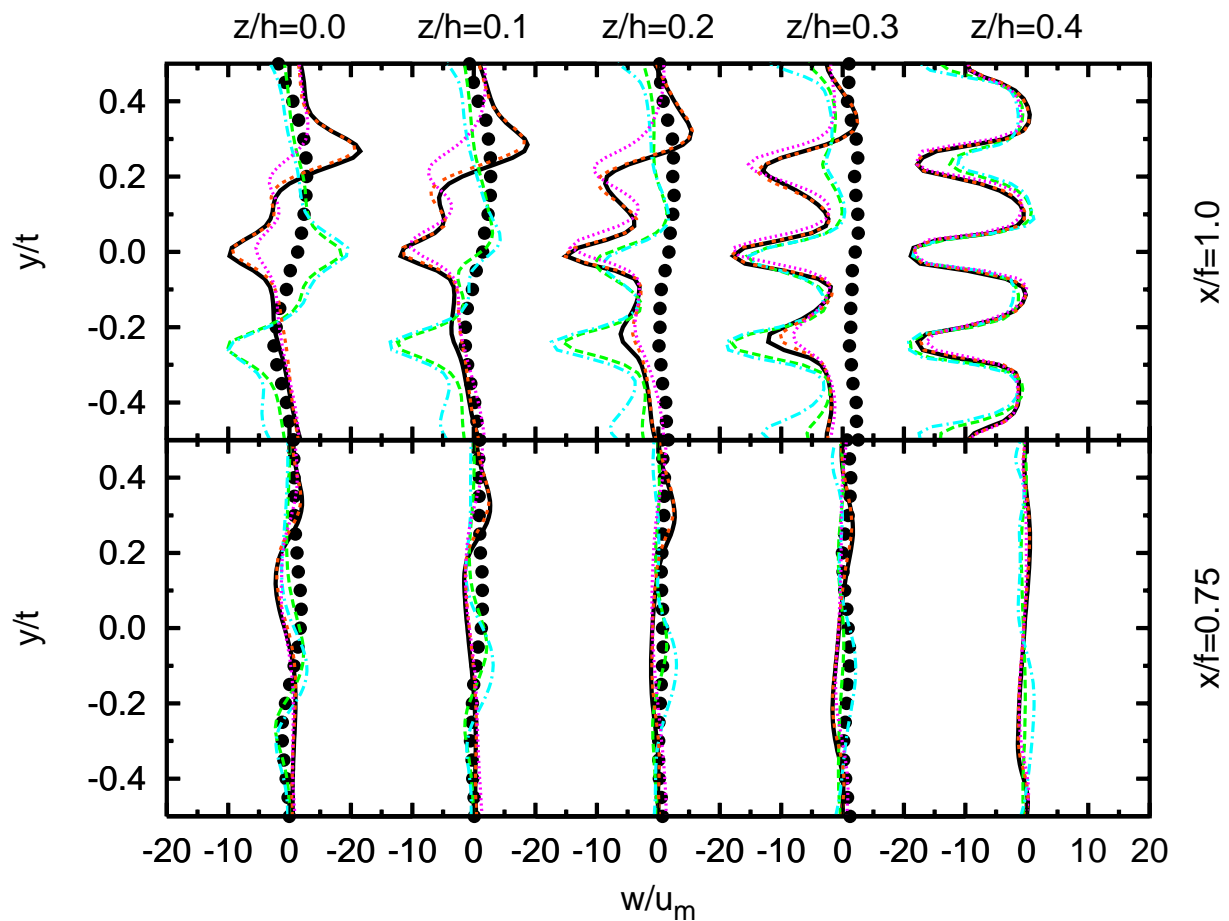


Bild 5.23: Mittlere Vertikalgeschwindigkeit der Ebenen $x/f=0,75$ und $x/f=1,0$.

Symbole: Exp.:●, $k-\epsilon$:—, $k-\omega$:—, QLM:····, ASM:— · —, SST:— · —

nen Messebene $x/f=0,5$ verdeutlicht dennoch, dass sich der Trend zur Vergleichmäßigung der Vertikalgeschwindigkeit weiter fortgesetzt hat. In der gesamten Messebene sind keine nennenswerten Vertikalgeschwindigkeitskomponenten mehr zu verzeichnen. Dies wird im wesentlichen von allen berechneten Geschwindigkeitsverteilungen dieser Ebene bestätigt, obwohl im Detail Unterschiede zwischen Rechnungen und Messung auftreten.

Die obere Hälfte von Bild 5.23 zeigt die Verteilung der Vertikalgeschwindigkeiten der Ebene $x/f=1$. Im Vergleich zur Ebene $x/f=0,75$ ergibt sich in der Einblaseebene eine veränderte Strömungscharakteristik. Im Gegensatz zu den stromauf gelegenen Messebenen sind hier bereits im mittleren Zentralbereich merkliche Vertikalgeschwindigkeiten gemessen worden. Aus der Verteilung der Geschwindigkeitskomponente kann auf einen zentralen Wirbel geschlossen werden, der im Vergleich zu den stromauf gelegenen Messebenen (wie beispielsweise Ebene $x/h=0,25$ in Bild 5.22 unten) etwas kompakter ausfällt. Die experimentell bestimmten Vertikalgeschwindigkeiten bauen sich mit kleiner werdendem Abstand zu den Sekundärluftbohrungen ab. Entlang der wandnächsten Traverse bei $z/h=0,4$ ist wiederum keine Messung möglich gewesen.

Die mit den verschiedenen Turbulenzmodellen berechneten Geschwindigkeitsverteilungen stehen in ausgeprägtem Kontrast zu den Messergebnissen. Von allen Turbulenzmodellen wird das Strahleindringverhalten des aus den Sekundärluftbohrungen in die Mischkammer strömenden Fluids deutlich überschätzt. Die Variation der Strahleindringtiefen entlang der Messtraversen hängt deutlich vom verwendeten Turbulenzmodell ab. Die lokal unterschiedlichen Eindringtiefen sind Folge des (berechneten) lokalen Totaldruckverhältnisses und konnten im Rahmen der experimentellen Mischungsuntersuchungen auch nachgewiesen werden [28]. Obwohl diese Diskrepanzen zwischen gemessenen Mischungs- und Geschwindigkeitsverteilungen Fragen bezüglich der Qualität der Geschwindigkeitsmessungen in diesem Bereich aufwerfen (da gerade bei den Vertikalgeschwindigkeitsmessungen die für valide Messungen notwendigen Datenraten oft nicht gegeben waren, bleiben die Unterschiede zwischen Geschwindigkeitsmessungen und Rechnungen insgesamt beträchtlich).

Bild 5.24 zeigt Mischungsverteilungen an vier Messebenen im Primärzonenbereich des Mischkammermoduls: $x/f = 0,3, = 0,5, = 0,8, = 1,0$. Als Mischungsvariable dient die in Gleichung (D.1) definierte bezogene Temperatur θ . Jedes einzelne Ebenenbild zeigt den vollständigen Strömungsquerschnitt des mittleren Segments des Mischkammermoduls. Das von den Einzelbildern abgedeckte Gebiet liegt demnach im Koordinatenbereich $-0,5 \leq y/t \leq 0,5$ sowie $-0,5 \leq z/t \leq 0,5$. Im Gegensatz zu der in Bild 5.19 gezeigten Totaldruckverteilung wurde in Bild 5.24 auf die Darstellung der beiden links und rechts angrenzenden Strömungsquerschnittsegmente verzichtet. Die Farbkodierung der Einzelbilder ist so gewählt, dass die Farbe Rot Hauptstromfluid mit der Temperatur $\theta = 1$ und die Farbe Blau Nebenstromfluid der Temperatur $\theta = 0$ entspricht. Alle weiteren Farben, wie z.B. Grün mit der bezogenen Temperatur $\theta = 0,5$, repräsentieren Mischungszustände zwischen Haupt- und Nebenstromfluid. Eine Temperaturverteilungsskala ist in Reihe (2), Ebene $x/f = 0,3$ aufgeführt. In Reihe (1) sind die experimentell erzielten Ergebnisse an den vier verschiedenen Messebenen dargestellt. Die Sekundärluft tritt in der Ebene $x/f = 1$ durch zwei gegenüber liegende, nicht versetzte Strahlreihen mit jeweils 5 Bohrungen in den betrachteten Strömungsquerschnitt ein. Wegen der Modellgeometrie werden die erste und fünfte Bohrung jeweils nur bis zu ihrem Bohrungsmittelpunkt berücksichtigt. Die Strahleindringtiefe variiert entlang des Strömungsquerschnitts entlang beider Strahlreihen als Folge des sich durch die Verdrallung der Hauptströmung einstellenden Druck- und Geschwindigkeitsfelds. Die Einzelstrahlen sind zudem aufgrund der verdrallten Hauptströmung entsprechend der Orientierung Umfangsgeschwindigkeitskomponente leicht geneigt. Das lokale Geschwindigkeits- und Druckfeld der Hauptströmung begünstigt oder behindert das Eindringverhalten der Sekundärluftstrahlen. Das Eindringverhalten der Strahlen wird begünstigt, wenn Drallgeschwindigkeitskomponente und Sekundärluftkomponente annähernd die gleiche Richtung aufweisen. Im umgekehrten Fall wird die Strahleinblasung behindert. Erreicht die eingeblassene Sekundärluft den Rückströmbereich der Hauptströmung, wird die Sekundärluft im Rückströmbereich stromauf in Richtung Drallerzeugerdüse transportiert. In der ersten stromauf gelegenen Messebene $x/f = 0,8$

ist anhand der Temperaturverteilung der Einfluss der beiden stärksten Sekundärlufteinblasungen sichtbar. Mit weiter zunehmendem Abstand von der Einblaseebene verschwindet dieser Einfluss.

In den Reihen (2) bis (6) sind den experimentellen Ergebnissen der Reihe (1) die Berechnungsergebnisse der verschiedenen Turbulenzmodelle gegenübergestellt. Bei allen betrachteten Turbulenzmodellen ist die charakteristische Variation der Eindringtiefe der Einzelstrahlen erkennbar. Allgemein wird die Strahleindringtiefe von allen Modellen überschätzt, wenngleich die Unterschiede nicht so eklatant sind wie die Vertikalgeschwindigkeitsverteilungen vermuten ließen. Das berechnete Strahleindringverhalten wird im wesentlichen von der Form, Lage und Ausdehnung der berechneten Rezirkulationszone bestimmt. Die Auswirkungen der unterschiedlich berechneten Rezirkulationszonen sind in der Ebene $x/f=0,8$ gut erkennbar, da Sekundärstromfluid teilweise in das Rückstromgebiet gelangt und stromauf transportiert wird. Bedingt durch die Überschätzung der Strahleindringtiefen gelangt bei den numerischen Berechnungen mehr Sekundärstromfluid in das Rückströmgebiet. Die berechneten Mischungsverteilungen sind deutlich inhomogener als die gemessenen Mischungsverteilungen, bei denen sich die Mischungsvariable an den stromauf der Einblaseebene gelegenen Ebenen in einem Bereich von $\theta = 0,7 - 0,9$ bewegt. Demgegenüber liegt die Bandbreite der gerechneten Mischungsverteilungen bei etwa $\theta = 0,3 - 0,9$. Die zweite Quelle für Unterschiede zwischen Messung und Rechnungen neben der Strahleindringtiefe ist die bereits mehrfach erwähnte Rezirkulationszone. Die bei den Mischungsuntersuchungen festgestellte Rezirkulationszone ist symmetrisch zu den Mittelpunkten der Ebenen angeordnet und unterscheidet sich damit qualitativ sowohl von den Ergebnissen der Geschwindigkeitsmessungen als auch von den Ergebnissen der Berechnungen. Bei den in den Reihen (2) bis (6) dargestellten Ergebnissen weisen die Rezirkulationszonen in Abhängigkeit des verwendeten Turbulenzmodells stets eine asymmetrische Lage auf, die sich teilweise (in den Reihen (2), (4) und (5)) mit den experimentellen Befunden der Geschwindigkeitsmessungen decken beziehungsweise qualitativ übereinstimmen.

Angesichts der auch zwischen den beiden experimentellen Methoden auftretenden Diskrepanzen ist eine Gesamtbewertung schwierig. Dennoch kann insgesamt gesehen bei der Berechnung der Strahlreiheneinblasung in eine verdrallte Querströmung mit keinem der eingesetzten Modelle eine zufrieden stellende Übereinstimmung mit den experimentellen Ergebnissen erzielt werden. Während mit dem Reynolds-Spannungsmodell aufgrund mangelnder Robustheit keine verwertbaren Berechnungsergebnisse zustande kamen, mangelte es den eingesetzten algebraischen Modellen insgesamt an Genauigkeit. Gründe hierfür sind zum einen, dass numerische Simulationen immer stark von der Güte der bereitgestellten Randbedingungen abhängen. Diesem Umstand wird bei der Konzeption von Experimenten und der Durchführung der Messungen noch nicht konsequent Rechnung getragen.

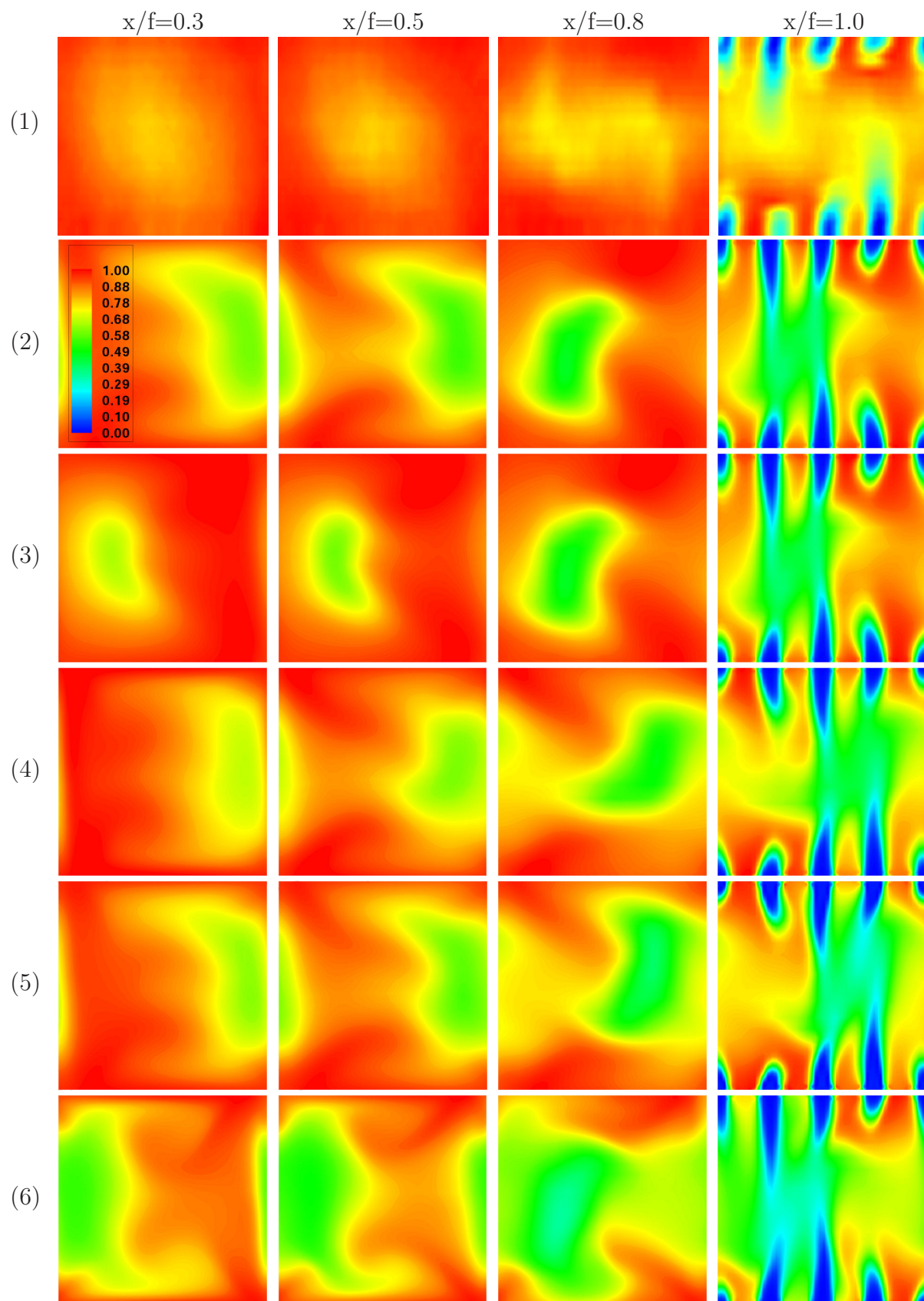


Bild 5.24: Mischungsverteilungen. (1):Exp., (2): $k-\epsilon$, (3): $k-\omega$, (4):QLM, (5):ASM, (6):SST

Zum anderen ist zu bedenken, dass die Berechnung turbulenter Strömungen unter starkem Krümmungseinfluss selbst nichtlineare Wirbelviskositätsmodelle zweiter Ordnung konzeptionell überfordern. Auch explizite algebraische Reynolds-Spannungsmodelle überwinden diese Beschränkung nicht, da sie unter vereinfachenden Annahmen (Gleichgewichtshypothese) aus den differentiellen Turbulenzmodellen abgeleitet werden (müssen), die bei turbulenten Strömungen mit starker Stromlinienkrümmung nicht erfüllt sind.

6 Berechnung der Brennkammerströmung mit einem Hybridverfahren

Die in Kapitel 5.4 festgestellten Abweichungen zwischen den Berechnungsergebnissen und Messungen des Brennkammerströmungsfelds sind Anlass für weitergehende Untersuchungen über mögliche Gründe, die über die bereits konstatierten Beschränkungen der eingesetzten Turbulenzmodelle hinausgehen. Neben den Einschränkungen der numerischen Methode kann prinzipiell sowohl die Charakteristik der turbulenten Strömung, also das Messobjekt selbst, aber auch das experimentelle Messverfahren einen Beitrag zu den gefundenen Abweichungen geliefert haben. Diese Annahme wurde im Rahmen der experimentellen Untersuchungen bestätigt, in denen instationäre Effekte beobachtet wurden [28].

Deshalb wurde zur Berechnung der turbulenten Brennkammerströmung statt des stationären RANS Verfahrens ein alternatives Verfahren zur Modellierung turbulenter Strömungen verwendet. Die wichtigsten Auswahlkriterien sind die Berücksichtigung des instationären Charakters der turbulenten Strömung sowie die Einhaltung des für ingenieurmäßige Anwendungen akzeptablen numerischen Aufwands.

Das für diesen Zweck naheliegendste Berechnungsverfahren ist die in Abschnitt 2.3.2 beschriebene Grobstruktursimulation. Der Einsatz der Grobstruktursimulation ist aber mit einem deutlich erhöhten numerischen Rechenaufwand verbunden, der im Vergleich zur statistischen Turbulenzmodellierung generell mindestens um den Faktor 100 höher liegt. Eine weitere Schwierigkeit ist die mit dem Einsatz der Grobstruktursimulation oft einhergehende Notwendigkeit zur Bestimmung instationärer Eintrittsrandbedingungen. Schließlich bedarf die Behandlung wandnaher turbulenter Strömungen durch die Grobstruktursimulation weiterer konzeptioneller Untersuchungen.

Diese Überlegungen führten zur Entwicklung so genannter Hybridverfahren durch Spalart et al. [50]. Sie verknüpfen das RANS Verfahren mit der Grobstruktursimulation (LES). In wandnahen Bereichen wird das RANS Verfahren verwendet während in wandfernen Bereichen das LES Verfahren zum Einsatz kommt, um so die Vorteile beider Verfahren optimal nutzen zu können.

Alternativ zum Hybridansatz sind auch instationäre Techniken denkbar, die auf dem RANS Verfahren basieren (URANS). Die Anwendung solcher Techniken impliziert jedoch eine klare Trennung der Zeitskalen der turbulenten Schwankungsbewegungen von den Zeitskalen der instationären Strömung. Kommt es in weiten Bereichen des Zeitskalenspektrums zu Überlappungen der Zeitskalen, ist eine Anwendung von URANS nicht empfehlenswert. Eine solche Überlappung kann beispielsweise bei stark verdrallten Brennkammerströmungen mit sehr hohen Turbulenzgraden auftreten [19].

Deshalb wurde ein Hybridverfahren für die Berechnung der turbulenten Brennkammerströmung genutzt. Details des im Programmpaket CFX implementierten Hybridverfahrens werden im nachfolgenden Abschnitt 6.1 beschrieben. Exemplarische Ergebnisse der mit dieser Modellierungstechnik berechneten turbulenten Brennkammerströmung sind in Abschnitt 6.2 dargestellt.

6.1 Hybridverfahren

Hybridverfahren kombinieren die statistische Turbulenzmodellierung (RANS) mit der Grobstruktursimulation (LES). Sie sollen die Vorteile des RANS Verfahrens bei der Berechnung turbulenter Grenzschichtströmungen mit den Vorteilen des LES Verfahrens bei der Berechnung turbulenter Strömungen mit starken Ablösungen, freien Scherströmungen oder Nachlaufströmungen verbinden. Letztere sind vom Auftreten großskaliger turbulenter Wirbel geprägt. Bei wandnahen grenzschichtartigen turbulenten Strömungen dominieren dagegen kleinskalige turbulente Wirbelstrukturen. Das Konzept von Hybridverfahren basiert deshalb auf der Verwendung des turbulenten Längenmaßstabs l_t als internen Schalter zwischen RANS und LES Verfahren. Das unter dem Namen „Detached Eddy Simulation“ (kurz: DES) bekannte Hybridverfahren wurde von Spalart et al. [50] vorgeschlagen.

DES ist an kein bestimmtes Turbulenzmodell gebunden. Der ursprüngliche Ansatz basiert auf der Verwendung des Eingleichungsmodells von Spalart und Allmaras [49]. In einer anderen Implementierung von Strelets [54] wird das in Abschnitt 2.4.4 beschriebene SST Turbulenzmodell von Menter [36] verwendet. Gegenüber der RANS Formulierung des Modells (vgl. Gleichungen (2.49)-(2.50) sowie (2.55)-(2.57)) wird für die DES Methode der Dissipationsterm in der Transportgleichung für die turbulente kinetische Energie in Abhängigkeit des turbulenten Längenmaßstabs l_t formuliert.

$$\frac{\partial(\rho k)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \overline{u_j k})}{\partial x_j} = P_k + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_{k3}} \right) \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right] - \rho \beta^* k \omega F_{DES} \quad (6.1)$$

Die in der Transportgleichung (6.1) auftretende Funktion F_{DES} erhöht die Dissipation von k , wenn das RANS (bzw. SST) basierte turbulente Längenmaß $l_{t,SST}$ größer als das LES (bzw. DES) basierte turbulente Längenmaß ist.

$$F_{DES} = \max\left(\frac{l_{t,SST}}{l_{t,DES}}, 1\right) \quad \text{mit} \quad l_{t,SST} = \frac{\sqrt{k}}{\beta^* \omega} \quad \text{und} \quad l_{t,DES} = C_{DES} \Delta \quad (6.2)$$

Die Bestimmung des turbulenten Längenmaßstabs $l_{t,DES}$ in Gleichung (6.2) geschieht analog der im Smagorinsky Modell verwendeten Definition in Abhängigkeit einer Modellkonstanten $C_{DES} = 0,78$ sowie der lokalen Gittergröße $\Delta = \max(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$. Die bei LES Methoden oft anzutreffende Modellierung des turbulenten Längenmaßstabs in Abhängigkeit der lokalen Gittergröße kann dazu führen, dass bei hinreichend feinen Gittern in Wandnähe ungewollt in den LES Modus umgeschaltet wird. Dies kann zur Berechnung vorzeitiger (gitterbedingter) Strömungsablösungen führen [37]. Zur Vermeidung eines solchen Verhaltens kann der Grenzschichtbereich besonders geschützt werden, indem die Schalterfunktion F_{DES} aus Gleichung (6.2) um die im Rahmen der BSL und SST Turbulenzmodelle eingeführten Funktionen F_1 oder F_2 (vgl. Gleichungen (2.51) und (2.56)) erweitert werden.

$$F_{DES} = \max\left(\frac{l_{t,SST}}{l_{t,DES}}(1 - F_{SST}), 1\right) \quad \text{mit} \quad F_{SST} = 0, F_1, F_2 \quad (6.3)$$

Die Funktionen F_1 und F_2 sind gut für den gewünschten Schutz des RANS Modus geeignet, da ihre ursprüngliche Funktion in der Überleitung von der $k-\omega$ Formulierung in Wandnähe zur $k-\epsilon$ Formulierung abseits fester Wände besteht. Ohne die optionale zusätzliche Funktion F_{SST} ($F_{SST} = 0$ in Gleichung (6.3)) ergibt sich wieder die ursprüngliche Formulierung aus Gleichung (6.2).

6.2 Berechnungsergebnisse

Das im vorigen Abschnitt beschriebene Hybridmodell wurde zur Berechnung der Brennkammerströmung benutzt, um den möglichen instationären Charakter der turbulenten Brennkammerströmung genauer zu untersuchen. Die vorgestellten Ergebnisse sind daher qualitativ bzw. illustrativ zu verstehen.

Als Startlösung für den instationären Berechnungsteil mit Hilfe der DES Methode diente eine konvergente stationäre Lösung, bei der die RANS Methode mit dem in Kapitel 2.4.4 beschriebenen SST Modell verwendet wurde. Bei instationären Rechnungen muss außer der Zeitschrittweite noch die Anzahl der inneren Iterationen pro Zeitschritt vorgegeben werden. Die Vorgaben haben einen großen Einfluss auf den Gesamtrechnenzeitbedarf und auf das Konvergenzverhalten der Rechnung. Im vorliegenden Fall wurde eine Zeitschrittweite von $t=0,016$ s vorgegeben. Pro Zeitschritt wurden wiederum drei innere Iterationen durchgeführt. Genau genommen muss jeder Zeitschritt im Rahmen der inneren Iterationen einzeln auskonvergiert sein. Da dies zu immensen Rechenzeiten führt, wird in der Praxis die Zahl der inneren Iterationen oft auf 3-5 beschränkt und die Zeitschrittweite dafür so klein gewählt, dass die globalen Strömungsgrößen nicht stark beeinträchtigt sind.

Ein solcher Kompromiss bietet die Möglichkeit, mit noch akzeptablen Rechenzeiten den transienten Charakter der Strömung zu visualisieren. Um die Gesamtrechnenzeit weiter zu verringern, wurde die Rechnung parallelisiert. Dafür standen drei Linux basierte PC-Workstations mit einem Hauptspeicher von je 1 GB sowie je einer CPU mit 1,3 GHz Taktgeschwindigkeit zur Verfügung. Somit konnte das Rechengitter intern in drei Teile aufgespalten und die Rechnungen auf drei Workstations gleichzeitig durchgeführt werden. Zur Erzielung der vorliegenden Lösung waren 7,3 Wochentage notwendig.

Bild 6.1 zeigt die Verteilung der Funktion F_{DES} aus Gleichung (6.2) im Berechnungsgebiet, über die der verwendete Ansatz zur turbulenten Strömungsberechnung gesteuert wird. Rot eingefärbt sind diejenigen Gebiete, in denen der RANS Ansatz zum Tragen kommt. In den blau dargestellten Bereichen wurde der LES Ansatz verfolgt. Die in Bild 6.1 gezeigte Verteilung zeigt, dass in wandnahen Bereichen, die durch kleine turbulente Längenmaße geprägt sind, der RANS Ansatz verwendet wird, während in den wandfernen Bereichen des Hauptkanals aufgrund der dort vorherrschenden größeren turbulenten Strukturen, die durch die Verdrallung und die Interaktion der Sekundärlufteinblasung hervorgerufen werden, der LES Ansatz verwendet wurde.

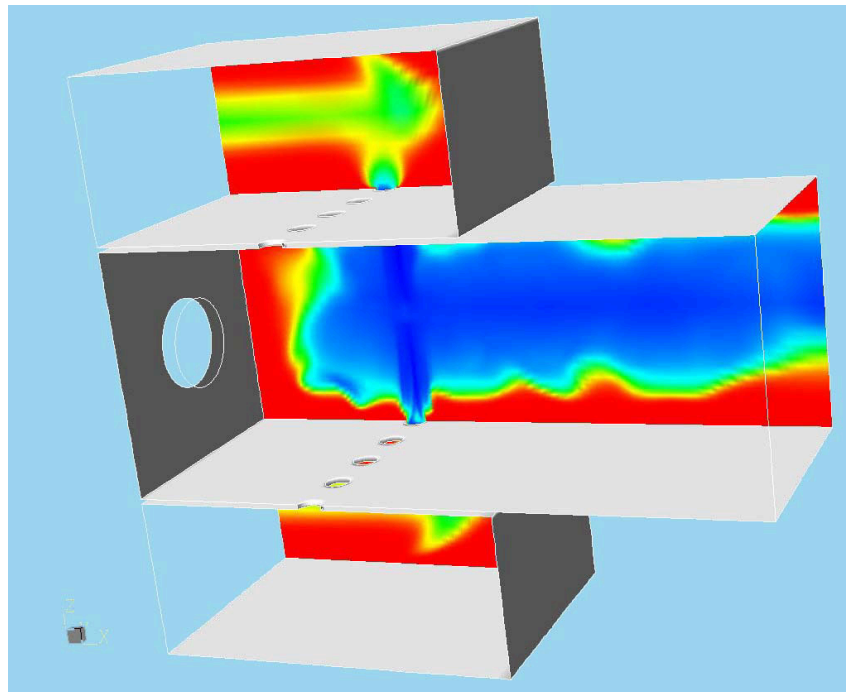


Bild 6.1: Verteilung der Mischungsfunktion F_{DES} im Berechnungsgebiet

Bild 6.2 zeigt die mit dem Hybridansatz berechneten Geschwindigkeitsverteilungen. Dargestellt sind Konturen der mittleren Geschwindigkeiten entlang der Mittelebene des Hauptkanals an vier beispielhaft ausgewählten Zeitpunkten. Anhand der vier Verteilungen wird deutlich, wie das Strahleindringverhalten im Verlauf der Zeit variiert. Die Momentaufnahmen zeigen, dass es sich bei der Strahleinblasung um ein hoch dynamischen Vorgang

handelt, bei dem abwechselnd die oberen und unteren Sekundärlufteinblasungen über die geometrische Mitte des Hauptströmungskanals hinaus in die jeweils gegenüber liegende Kanalseite eindringen. Weiterhin werden die Strahlen durch die Interaktion mit dem verdrehten Hauptströmungsfeld abwechselnd in Strömungsrichtung und gegen die Strömungsrichtung in Richtung des stromauf befindlichen Primärzonenbereichs abgelenkt.

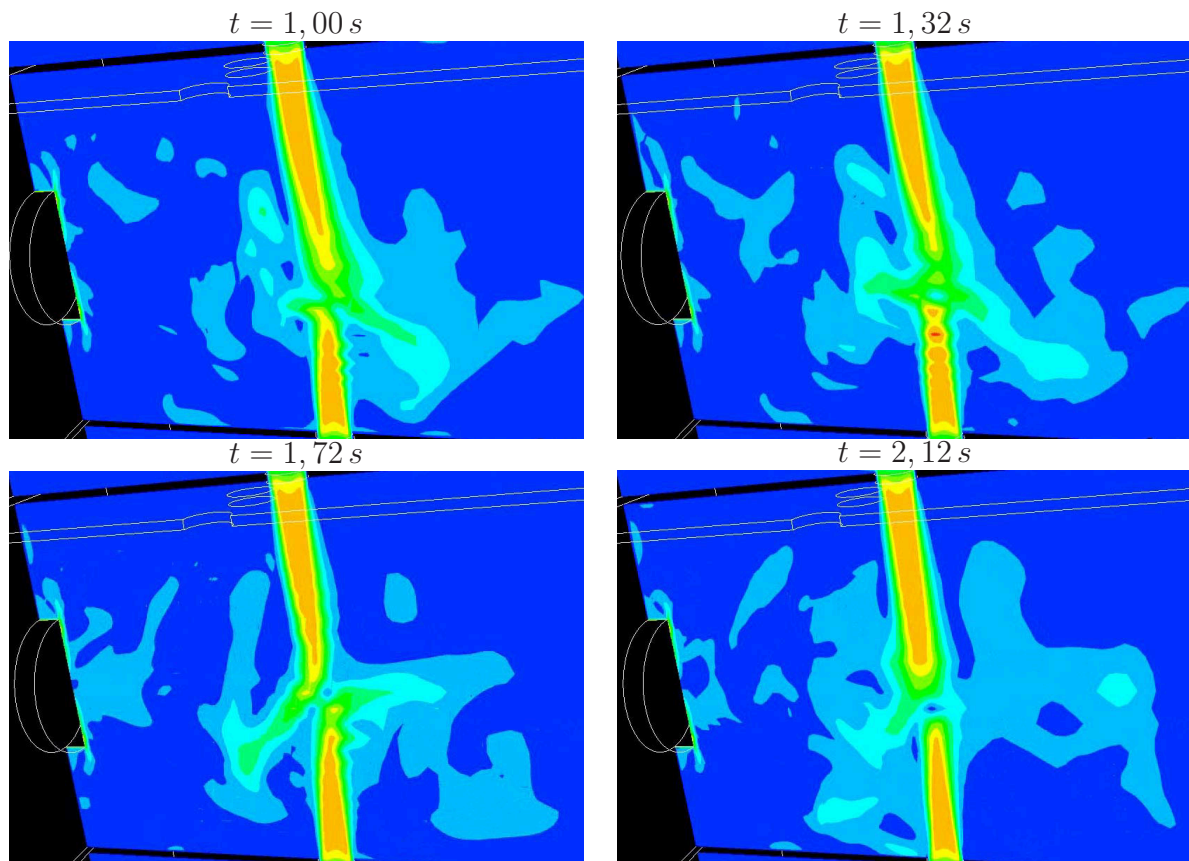


Bild 6.2: Geschwindigkeitsverteilungen zu vier verschiedenen Zeitpunkten

Die in Bild 6.2 dargestellten Geschwindigkeitsverteilungen bestätigen den dynamisch instationären Charakter der Strömung. Zudem zeigen sie, dass die DES Methode ein viel versprechender Ansatz zur Berechnung dieses Strömungstyps ist.

7 Zusammenfassung und Ausblick

Die Arbeit befasst sich mit der Berechnung der Mischungsvorgänge im Primärzonenbereich einer Gasturbinenbrennkammer. Die statistische Beschreibungsweise turbulenter Strömungen kommt zum Einsatz, bei der zeitlich gemittelte Strömungsgrößen betrachtet und die Wirkung der Turbulenz mit Hilfe von Turbulenzmodellen beschrieben wird. Einfache lineare Wirbelviskositätsmodelle wie das k - ϵ Turbulenzmodell stoßen bei der Berechnung turbulenter Strömungen mit stark dreidimensionalen Effekten hinsichtlich ihrer Genauigkeit auf Grenzen. Der Einsatz höherwertiger Turbulenzmodelle (Reynolds-Spannungsmodelle) ist oft mit einer starken Reduktion der Robustheit und Schnelligkeit der Verfahrens verbunden. Vor diesem Hintergrund wurden in den vergangenen Jahren nichtlineare Wirbelviskositätsmodelle vorgeschlagen. Sie sollen die positiven numerischen Eigenschaften linearer Wirbelviskositätsmodelle mit der Vorhersagegüte der strömungsmechanisch besser fundierten Reynolds-Spannungsmodelle verbinden.

Der Einsatz nichtlinearer Wirbelviskositätsmodelle zur turbulenten Strömungsberechnung steht im Mittelpunkt der Untersuchungen. Für die Arbeit wurden drei nichtlineare Turbulenzmodelle mit unterschiedlichem Grad an Nichtlinearität ausgewählt. Ein quasi-lineares Wirbelviskositätsmodell von Pettersson-Reif et al. [41], ein quadratisches Wirbelviskositätsmodell von Abid, Rumsey und Gatski [1] sowie ein kubisches Turbulenzmodell von Craft, Iacovides und Yoon [8]. Desweiteren wurden für die Untersuchungen als lineares Wirbelviskositätsmodell das k - ϵ Turbulenzmodell und als lineares Reynolds-Spannungsmodell das von Launder, Reece und Rodi [29] vorgeschlagene Turbulenzmodell als Referenzmodelle herangezogen.

Zur Strömungsberechnung wird das kommerziell verfügbare numerische Verfahren CFX-TASCflow [2] benutzt. Die Turbulenzmodelle von Pettersson-Reif et al. [41] und Craft, Iacovides, Yoon [8] werden im Rahmen der Arbeit in CFX-TASCflow implementiert. Bei der Verifikation der Modelle anhand der turbulenten Strömung durch einen Kanal mit quadratischem Strömungsquerschnitt zeigt sich, dass die Verwendung des kubischen Modells [8] mit numerischen Problemen verbunden ist. Eine genauere Analyse des Modells verdeutlicht, dass die unzureichende Kalibration der freien Modellkoeffizienten zu den numerischen Schwierigkeiten führt.

Das komplexe turbulente Strömungsfeld in Gasturbinenbrennkammern wird im wesentlichen durch die Verdrallung des Primärmassenstroms sowie durch die Sekundärlufteinblasung bestimmt. Daher werden eine gut vermessene turbulente Drallströmung [24] sowie die Strahleinblasung in eine Querströmung [4] als Referenzfälle herangezogen, um das Verhalten der eingesetzten Turbulenzmodelle anhand der beiden charakteristischen Strömungstypen zu analysieren. Daran schließt sich die Berechnung des turbulenten Strömungs- und Mischungsfelds in einer Modellbrennkammer an. Beim Vergleich der berechneten mit

den experimentell bestimmten Strömungsfeldern am Beispiel der Strahleinblasung in eine Querströmung zeigt sich ein generell guter Übereinstimmungsgrad zwischen Messung und Rechnungen. Mit den formal höherwertigen Turbulenzmodellen (das QLM, ASM und das LRR Turbulenzmodell) können keine weiteren Verbesserungen der Vorhersagegüte erzielt werden. Bei der Berechnung der turbulenten Drallströmung bestätigt sich, dass die linearen Wirbelviskositätsmodelle bei der Bestimmung der Tangentialgeschwindigkeitsverteilungen an ihre Grenzen stoßen. Auch die nichtlinearen Turbulenzmodelle können keine wesentliche Verbesserungen bringen. Bei den Axialgeschwindigkeiten kann generell ein besserer Übereinstimmungsgrad erzielt werden. Im Fall der untersuchten turbulenten Brennkammerströmung sind weder lineare noch nichtlineare noch Reynolds-Spannungs Turbulenzmodelle in der Lage, die stark verdrallte turbulente Strömung mit Sekundäreffekten mit ausreichender Genauigkeit in einem für industrielle Anwendungen notwendigen Zeitrahmen zu berechnen. Dies liegt entweder an vereinfachenden Annahmen in der Herleitung der Modelle oder aber an mangelnder numerischer Robustheit.

Aus dieser Erkenntnis ergeben sich folgende Ansatzpunkte. Der Weiterentwicklung von auf der RANS Methode aufbauenden Turbulenzmodellen hinsichtlich einer für industrielle Zwecke hinreichend genauen Beschreibung komplexer turbulenter Strömungen sind Grenzen gesetzt. Dies liegt neben den bereits erwähnten Gründen (mangelnde Robustheit, vereinfachende Annahmen, Kalibration der freien Modellkoeffizienten) auch an der Abhängigkeit von qualitativ hochwertigen Rand- und Anfangsbedingungen. Die Existenz vertrauenswürdiger Randbedingungen ist ein Faktor, weshalb bei sorgfältiger Implementierung und Anwendung höherwertiger Turbulenzmodelle in Einzelfällen akzeptable Ergebnisse erzielbar sind.

Ähnliches gilt für den Einsatz der LES Methode. Hier stellt sich unabhängig von den verfügbaren Hardwareressourcen die Frage nach der Vorgabe realistischer Randbedingungen noch dringender. Zudem ist bei der Berechnung wandgebundener Strömungen die Behandlung wandnaher Bereiche noch nicht zufriedenstellend gelöst.

Turbulente Strömungen in Gasturbinenbrennkammern sind als wandgebundene Innenströmungen sowohl stark von den geometrischen Randbedingungen als auch bedingt durch den Einsatz von Drall und Sekundärlufteinblasung durch große turbulente Wirbelstrukturen bestimmt. Da die Vorteile der LES Methode auf der Beschreibung solcher Strukturen liegt und die Vorteile der RANS Methode bei der Berechnung wandnaher Bereiche zu suchen sind, bietet sich für weitere Untersuchungen auf dem Gebiet drallbehafteter Innenströmungen ein Hybridansatz RANS/LES an. Dieser als DES (*detached eddy simulation*) bezeichnete Ansatz wurde von Spalart et al. [50] vorgeschlagen. Bei dieser Methode wird der turbulente Längenmaßstab als Schalter verwendet, um die beiden Methoden ineinander zu überführen. Im Rahmen der dreidimensionalen und instationären DES Methode wird in der Nähe fester Wände das zugrunde liegende RANS Turbulenzmodell gelöst. Abseits

fester Wände erfolgt der Übergang zur LES Methode, sobald das turbulente Längenmaß die Filterweite (die Maschenweite des Gitters) überschreitet. Der durch die Methode notwendige hohe numerische Aufwand kann durch die Parallelisierung der Berechnungen zumindest teilweise kompensiert werden. Zudem ist bezüglich der Rechnerkapazitäten weiterhin von einem ungebrochenen Wachstum auszugehen.

A Differentielle Modelle

Die Transportgleichung des Reynolds-Spannungstensors (2.30) bildet den Ausgangspunkt der differentiellen Turbulenzmodelle. Die Herleitung von Gleichung (2.30) aus den Navier-Stokes Gleichungen ist zunächst ohne idealisierende Annahmen möglich, die bei der Ableitung algebraischer Turbulenzmodelle unumgänglich sind. Damit sind einige konzeptionelle Vorteile verbunden. Denn dies ermöglicht es den differentiellen Modellen prinzipiell, turbulente Strömungen zu beschreiben, in denen turbulente Transportprozesse gegenüber lokalen Effekten dominieren oder zumindest nicht zu vernachlässigen sind. Im Gegensatz zu den auf der Boussinesq Hypothese aufbauenden algebraischen Turbulenzmodellen können differentielle Modelle unterschiedliche Normalspannungskomponenten des Reynolds-Spannungstensors bei verschwindenden Scherraten vorhersagen. Schließlich ist in differentiellen Modellen die Abhängigkeit der die Dynamik der Turbulenz beschreibenden Terme von zusätzlichen, beispielsweise durch Systemrotation oder Stromlinienkrümmung hervorgerufenen Kräften enthalten.

Zur Lösung der Transportgleichung des Reynolds-Spannungstensors (2.30) müssen die dort auftretenden unbekannten Terme (2.32)-(2.34) modelliert werden. Differentielle Turbulenzmodelle unterscheiden sich hauptsächlich in der Modellierung des Tensors der Druck-Scher Korrelation (2.32). Die Annahmen zur Modellierung des Dissipationstensors (2.33) und des Tensors des turbulenten Transports (2.34) sind dagegen für viele Turbulenzmodelle gleich. Dissipation tritt bei den kleinen turbulenten Skalen auf, die als geometrieunabhängig, homogen und isotrop angenommen werden. Mit der Annahme der lokalen Richtungsunabhängigkeit (Isotropie) kleiner turbulenter Skalen kann der Dissipationstensor ϵ_{ij} auf die skalare Größe Dissipationsrate ϵ reduziert werden (A.1). Die Modellierung des turbulenten Transporttensors C_{ijk} erfolgt unter Vernachlässigung der im exakten Term (2.32) auftretenden Druck-Korrelationsterme und unter Verwendung einiger heuristischer Annahmen [58] mit Hilfe eines Gradientenflussansatzes (A.2).

$$\epsilon_{ij} = \frac{2}{3}\rho\epsilon\delta_{ij}, \quad \text{mit} \quad \epsilon = \nu \overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial u'_i}{\partial x_k}} \quad (\text{A.1})$$

$$C_{ijk} = -C_s \frac{k}{\rho\epsilon} \left[\overline{\rho u'_i u'_m} \frac{\partial(\overline{\rho u'_j u'_k})}{\partial x_m} + \overline{\rho u'_j u'_m} \frac{\partial(\overline{\rho u'_i u'_k})}{\partial x_m} + \overline{\rho u'_k u'_m} \frac{\partial(\overline{\rho u'_i u'_j})}{\partial x_m} \right] \quad (\text{A.2})$$

Der verbleibende unbekannte Term ist der Druck-Scher Korrelationstensor Π_{ij} (2.32), der eine Umverteilung turbulenter kinetischer Energie innerhalb der Normalkomponenten des Reynolds-Spannungstensors bewirkt, bis der statistisch wahrscheinlichste Zustand einer Gleichverteilung der Normalkomponenten erreicht wird. Er ist von derselben Größenordnung wie der Produktionsterm P_{ij} (2.31) in der Transportgleichung des Reynolds-Spannungstensors und deshalb eine nicht zu vernachlässigende Einflussgröße in der Bi-

lanzgleichung. Der Modellierung der Druck-Scher Korrelation kommt eine besondere Bedeutung zu, da trotz der relativen Bedeutung des Tensors wegen der auf experimentellem Weg nicht bestimmmbaren Korrelationen keine Datenbasis vorliegt. Im Folgenden werden die wesentlichen Schritte zur Modellierung des Druck-Scher Korrelationstensors gezeigt. Eine ausführlichere Diskussion ist beispielsweise bei Wilcox [58] oder Hallbäck [21] zu finden.

Ausgangspunkt für die Modellierung der Druck-Scher Korrelation (2.32) ist eine Poisson Gleichung der Druckfluktuationen (A.3), die formal aus den Navier-Stokes Gleichungen ableitbar ist [58].

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 p'}{\partial x_k \partial x_k} = \underbrace{-2 \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \frac{\partial u'_j}{\partial x_i}}_{(rapid)} - \underbrace{\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} (u'_i u'_j - \overline{u'_i u'_j})}_{(slow)} \quad (\text{A.3})$$

Die Gleichung für die Druckfluktuationen (A.3) besteht aus zwei Termen, die physikalisch unterschiedlich interpretierbar sind. Der erste Term auf der rechten Seite von (A.3) beinhaltet den Einfluss von Geschwindigkeitsgradienten, während der zweite Term nichtlineare Abhängigkeiten der fluktuierenden Geschwindigkeit beschreibt. Wegen der Linearität der Poisson Gleichung kann die Druckfluktuation p' als Summe zweier Teilbeiträge betrachtet werden: $p' = p'_{(slow)} + p'_{(rapid)}$. Die Gesamtgleichung (A.3) ergibt sich durch Superposition aus den Poisson Gleichungen der beiden Einzelbeiträge¹⁷

Gleichung (A.3) kann mit Hilfe Green'scher Funktionen integriert werden. Man erhält so eine Beziehung für die Druckfluktuation p' . Multiplikation mit $\frac{\partial u'_i}{\partial x_j}$ und anschließender Reynolds'scher Mittelung ergibt schließlich die Beziehung für die Druck-Scher Korrelation [44]. Die integrierte Form von Gleichung (A.3) enthält neben den beiden bereits vorhandenen Termen ein zusätzliches Oberflächenintegral, das als Wandreflektionsterm bezeichnet wird, aber hier unberücksichtigt bleibt. Der Druck-Scher Korrelationstensor ergibt sich somit allgemein als Summe zweier Tensoren, den Beiträgen des langsamen und des schnellen Anteils.

$$\Pi_{ij} = \Pi_{ij}^{(s)} + \Pi_{ij}^{(r)} \quad (\text{A.4})$$

Die Modellierung des langsamen Anteils des Druck-Scher Korrelationstensors basiert auf der bereits erwähnten Erfahrung, dass in homogenen, anisotropen turbulenten Strömun-

¹⁷Die beiden Beiträge zur Druckfluktuation werden als so genannter langsamer Anteil (engl. slow) sowie schneller Anteil (engl. rapid) bezeichnet, weil der schnelle Anteil im Gegensatz zum langsamen Anteil explizit vom Geschwindigkeitsgradienten abhängt.

gen der langsame Term eine Umverteilung der turbulenten kinetischen Energie unter den Normalkomponenten des Reynolds-Spannungstensors hin zu einer gleichmäßigen und damit isotropen Verteilung bewirkt. Da weiterhin die turbulente kinetische Energie durch den Einfluss der Dissipation langsam abklingt, wird $\Pi_{ij}^{(s)}$ allgemein in Abhängigkeit der Anisotropie, der Dissipation sowie der turbulenten Reynolds-Zahl Re_t modelliert, die bei den hier betrachteten Turbulenzmodellen jedoch entfällt. Der Anisotropietensor a_{ij} gibt die Abweichung des Reynolds-Spannungstensors vom isotropen Zustand an.

$$a_{ij} = \frac{\overline{u'_i u'_j}}{k} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \quad (\text{A.5})$$

Unter Verwendung des Cayley-Hamilton Theorems ist im allgemeinen Fall ein tensorieller Ansatz zweiter Ordnung ableitbar [21].

$$\Pi_{ij}^{(s)} = -\epsilon \left[C_{s1} a_{ij} + C_{s2} \left(a_{ik} a_{kj} - \frac{1}{3} II_a \delta_{ij} \right) \right] \quad (\text{A.6})$$

Bei der Modellierung des schnellen Anteils des Druck-Scher Korrelationstensors $\Pi_{ij}^{(r)}$ tritt zusätzlich zu den Größen Anisotropie, Dissipation und turbulenter Reynolds-Zahl noch die Abhängigkeit vom Gradienten der mittleren Geschwindigkeit auf. Ausgangspunkt der Modellierung ist die Einführung eines Tensors vierter Ordnung, der in Kombination mit dem Gradienten der mittleren Geschwindigkeit die allgemeine Bestimmungsgleichung für den Rapid Term liefert [21].

$$\Pi_{ij}^{(r)} = 4k \frac{\partial \overline{u_p}}{\partial x_q} (M_{iqpj} + M_{jqpi}) \quad (\text{A.7})$$

Damit ist das Problem auf die Bestimmung des Tensors M_{ijpq} verschoben, der in Abhängigkeit des Anisotropietensors a_{ij} modelliert wird. Unter Verwendung des Cayley-Hamilton Theorems, Ausnutzung verschiedener Symmetriebedingungen, einer Kontinuitätsbedingung sowie der so genannten Green'schen Bedingung kann ein allgemeiner tensorieller Ansatz zur Bestimmung von M_{ijpq} entwickelt werden [21]. Der Ansatz enthält insgesamt 15 tensoriell unabhängige Terme, jeweils mit einer skalaren Funktion Q_a multipliziert, die ihrerseits von den Invarianten des Anisotropietensors sowie der turbulenten Reynolds-Zahl abhängen können. Einsetzen des Ansatzes für M_{ijpq} liefert die allgemeine Konstitutivgleichung für den Rapid Term (A.8):

$$\begin{aligned}
\Pi_{ij}^{(r)} = & kS_{pq} \left[Q_1 \delta_{ip} \delta_{jk} + Q_2 (a_{ip} \delta_{jq} + a_{jp} \delta_{iq} - \frac{2}{3} a_{pq} \delta_{ij}) + Q_3 a_{pq} a_{ij} + \right. \\
& Q_4 (a_{iq} a_{jp} - \frac{1}{3} a_{pk} a_{kq} \delta_{ij}) + Q_5 a_{pl} a_{lq} a_{ij} + \\
& \left. (Q_5 a_{pq} + Q_6 a_{pl} a_{lq}) (a_{ik} a_{kj} - \frac{1}{3} II_a \delta_{ij}) \right] + \\
& kW_{pq} \left[Q_7 (a_{ip} \delta_{jq} + a_{jp} \delta_{iq}) + Q_8 a_{pk} (a_{jk} \delta_{iq} + a_{ik} \delta_{jk}) + \right. \\
& \left. Q_9 a_{pk} (a_{jk} a_{iq} + a_{ik} a_{jq}) \right]
\end{aligned} \tag{A.8}$$

mit

$$S_{pq} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \overline{u_p}}{\partial x_q} + \frac{\partial \overline{u_q}}{\partial x_p} \right) \quad \text{und} \quad W_{pq} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \overline{u_p}}{\partial x_q} - \frac{\partial \overline{u_q}}{\partial x_p} \right) \tag{A.9}$$

Damit sind prinzipiell alle unbekannten Terme der Transportgleichung des Reynolds-Spannungstensors bestimmbar. Zur Lösung des Gleichungssystems muss jedoch, wie schon bei den algebraischen Turbulenzmodellen erwähnt, eine Transportgleichung für ein turbulentes Längenmaß aufgestellt, modelliert und gelöst werden, wobei in den meisten Fällen die Dissipationsrate ϵ gewählt wird. Die modellierte Transportgleichung von ϵ für Reynolds-Spannungs Turbulenzmodelle unterscheidet sich nur unwesentlich von der des k - ϵ Modells (2.45), da hier der Diffusionsterm¹⁸ in Analogie zur Modellierung des turbulenten Transportterms C_{ijk} (A.2) und nicht in Abhängigkeit der Wirbelviskosität modelliert wird.

$$\frac{\partial(\rho\epsilon)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho\overline{u_j\epsilon})}{\partial x_j} = C_{\epsilon 1} \frac{\epsilon}{k} P_k - C_{\epsilon 2} \frac{\epsilon^2}{k} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(C_{\epsilon} \frac{k}{\epsilon} \overline{\rho u'_k u'_l} + \delta_{kl} \mu \right) \frac{\partial \epsilon}{\partial x_l} \right] \tag{A.10}$$

Wiederum ist die Herleitung von Gleichung (A.10) mit so starken heuristischen Annahmen verbunden, dass man die gesamte Gleichung als Modell betrachten kann [58]. Zur Lösung des Gleichungssystems müssen noch Werte für die freien Koeffizienten vergeben werden. Sie sind, abgesehen von den Werten für den modellierten Druck Scher Korrelationstensor, in Tabelle A.1 zusammengestellt. Die hier verwendeten Turbulenzmodelle unterscheiden sich in der Bestimmung von Π_{ij} und werden in den folgenden beiden Unterkapiteln erläutert.

¹⁸letzter Term auf der rechten Seite von (A.10)

C_1	C_2	C_s	$C_{\epsilon 1}$	$C_{\epsilon 2}$	C_{ϵ}
1,8	0,6	0,22	1,45	1,9	0,18

Tabelle A.1: Koeffizienten der Reynolds-Spannungsmodelle

Lineares RSM: Das LRR Turbulenzmodell

Das LRR Turbulenzmodell von Launder, Reece Rodi [29] verwendet sowohl für den langsamen als auch für den schnellen Anteil des Druck-Scher Korrelationstensors einen linearen Modellansatz. Wird in der allgemeinen Bestimmungsgleichung für $\Pi_{ij}^{(s)}$ (A.6) die Konstante C_{s2} vernachlässigt, ergibt sich der lineare Zusammenhang in (A.11).

$$\Pi_{ij}^{(s)} = -C_{s1}\rho\epsilon a_{ij} \quad (\text{A.11})$$

Wegen des linearen Modellansatzes für den Rapid Term verbleiben die Anteile Q_1, Q_2 und Q_7 aus der allgemeinen Konstitutivgleichung (A.8) und der Rapid Term ergibt sich gemäß Gleichung (A.12) zu

$$\Pi_{ij}^{(r)} = C_{r2}\rho k S_{ij} + C_{r4}\rho k \left(a_{ik}S_{jk} + a_{jk}S_{ik} - \frac{2}{3}a_{kl}S_{kl}\delta_{ij} \right) + C_{r5}\rho k \left(a_{ik}W_{jk} + a_{jk}W_{ik} \right) \quad (\text{A.12})$$

Mit Hilfe dieser allgemeinen Formulierung für den Rapid Term können durch die Wahl der Koeffizienten zwei Varianten des LRR Turbulenzmodells eingestellt werden. Die Werte der Koeffizienten sind in Tabelle A.2 aufgeführt. Bei der LRR-IP Modellvariante sorgt der Return Term für eine Reduktion der Anisotropie des Produktionstensors P_{ij} , während im LRR-QI Modell der Rapid Term die Anisotropie des Reynolds-Spannungstensors $\overline{u'_i u'_j}$ (bzw. des Anisotropietensors a_{ij}) verringern soll. Das LRR-IP Modell stellt eine Vereinfachung des etwas allgemeineren linearen Ansatzes für den Rapid Term dar, führt aber interessanterweise oft zu besseren Ergebnissen (siehe Launder [16]).

	C_{s1}	C_{r2}	C_{r4}	C_{r5}
LRR-IP	1,8	0,8	0,6	0,6
LRR-QI	1,8	0,8	0,875	0,655

Tabelle A.2: Die Koeffizienten der LRR Modellvarianten

Nichtlineares RSM: Das SSG Turbulenzmodell

Das SSG Turbulenzmodell von Speziale, Sarkar und Gatski [51] nutzt sowohl für den langsamen Anteil des Druck Scher Korrelationstensors als auch für den schnellen Anteil einen nichtlinearen Ansatz. Der Ansatz für den Slow Term (A.13) entspricht dem in Gleichung A.6 angegebenen allgemeinen Zusammenhang.

$$\Pi_{ij}^{(s)} = -\rho\epsilon \left[C_{s1}a_{ij} + C_{s2} \left(a_{ik}a_{kj} - \frac{1}{3}II_a\delta_{ij} \right) \right] \quad (\text{A.13})$$

Bei der Modellierung des Rapid Terms werden ebenfalls zusätzlich zu den linearen Termen des allgemeinen Zusammenhangs (A.8) nichtlineare Anteile zweiter Ordnung berücksichtigt. Es steht zusätzlich Term Q_4 des allgemeinen Zusammenhangs (A.8) zur Verfügung. Die in Tabelle A.3 zusammengefassten Koeffizienten des SSG Modells wurden anhand zweidimensionaler homogener Scherströmungen kalibriert. Vernachlässigt man die Koeffizienten C_{s2}, C_{r1} und C_{r3} , ergibt sich wieder das lineare LRR Modell aus Abschnitt A.

$$\begin{aligned} \Pi_{ij}^{(r)} = & -C_{r1}P_ka_{ij} + C_{r2}\rho k S_{ij} - C_{r3}\rho k S_{ij}\sqrt{II_a} \\ & + C_{r4}\rho k \left(a_{ik}S_{jk} + a_{jk}S_{ik} - \frac{2}{3}a_{kl}S_{kl}\delta_{ij} \right) + C_{r5}\rho k \left(a_{ik}W_{jk} + a_{jk}W_{ik} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

C_{s1}	C_{s2}	C_{r1}	C_{r2}	C_{r3}	C_{r4}	C_{r5}
1,7	-1,05	0,9	0,8	0,65	0,625	0,2

Tabelle A.3: Die Koeffizienten des SSG Modells

B Erhaltungsgleichungen in Zylinderkoordinaten

Die Transformation der Erhaltungsgleichungen in Zylinderkoordinaten ist bei der Betrachtung drallbehafteter Strömungen vorteilhaft und der Vollständigkeit halber im $\langle x, r, \varphi \rangle$ Koordinatensystem angegeben. In den Gleichungen wurden Zeitunabhängigkeit und Rotationssymmetrie vorausgesetzt.

Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial(rU_r)}{\partial r} = 0 \quad (\text{B.1})$$

Impulserhaltungsgleichungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial(rU_xU_x)}{\partial x} + \frac{\partial(rU_xU_r)}{\partial r} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial(rp)}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} r \left(\nu \frac{\partial U_x}{\partial x} - \overline{u'_x u'_x} \right) + \frac{\partial}{\partial r} r \left(\nu \frac{\partial U_x}{\partial r} - \overline{u'_x u'_r} \right) \\ \frac{\partial(rU_xU_r)}{\partial x} + \frac{\partial(rU_rU_r)}{\partial r} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial(rp)}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial x} r \left(\nu \frac{\partial U_r}{\partial x} - \overline{u'_x u'_r} \right) + \frac{\partial}{\partial r} r \left(\nu \frac{\partial U_r}{\partial r} - \overline{u'_r u'_r} \right) \\ &\quad + \frac{p}{\rho} + U_\varphi^2 - \nu \frac{U_r}{r} + \overline{u'_\varphi u'_\varphi} \\ \frac{\partial(rU_xU_\varphi)}{\partial x} + \frac{\partial(rU_rU_\varphi)}{\partial r} &= \frac{\partial}{\partial x} r \left(\nu \frac{\partial U_\varphi}{\partial x} - \overline{u'_x u'_\varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial r} r \left(\nu \frac{\partial U_\varphi}{\partial r} - \overline{u'_r u'_\varphi} \right) \\ &\quad - U_r U_\varphi - \nu \frac{U_\varphi}{r} + \overline{u'_r u'_\varphi} \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

Symmetrischer und antimetrischer Geschwindigkeitsgradiententensor

$$S_{ij} = \begin{pmatrix} S_{rr} & S_{r\varphi} & S_{xr} \\ S_{r\varphi} & S_{\varphi\varphi} & S_{x\varphi} \\ S_{rx} & S_{\varphi x} & S_{xx} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial U_r}{\partial r} & \frac{1}{2} r \frac{\partial(U_\varphi/r)}{\partial r} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_x}{\partial r} + \frac{\partial U_r}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} r \frac{\partial(U_\varphi/r)}{\partial r} & \frac{U_r}{r} & \frac{1}{2} \frac{\partial U_\varphi}{\partial x} \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_x}{\partial r} + \frac{\partial U_r}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \frac{\partial U_\varphi}{\partial x} & \frac{\partial U_x}{\partial x} \end{pmatrix} \quad (\text{B.3})$$

$$W_{ij} = \begin{pmatrix} W_{rr} & W_{r\varphi} & W_{xr} \\ W_{r\varphi} & W_{\varphi\varphi} & W_{x\varphi} \\ W_{rx} & W_{\varphi x} & W_{xx} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \frac{1}{r} \frac{\partial(rU_\varphi)}{\partial r} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_r}{\partial x} - \frac{\partial U_x}{\partial r} \right) \\ -\frac{1}{2} \frac{1}{r} \frac{\partial(rU_\varphi)}{\partial r} & 0 & \frac{1}{2} \frac{\partial U_\varphi}{\partial x} \\ -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_x}{\partial r} - \frac{\partial U_r}{\partial x} \right) & -\frac{1}{2} \frac{\partial U_\varphi}{\partial x} & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.4})$$

Produktionsterme

$$P_{xx} = -2(\overline{u'_x u'_x} \frac{\partial U_x}{\partial x} + \overline{u'_x u'_r} \frac{\partial U_x}{\partial r}) \quad (\text{B.5})$$

$$P_{rr} = -2(\overline{u'_x u'_r} \frac{\partial U_r}{\partial x} + \overline{u'_r u'_r} \frac{\partial U_r}{\partial r} - \overline{u'_r u'_\varphi} \frac{U_\varphi}{r}) \quad (\text{B.6})$$

$$P_{\varphi\varphi} = -2(\overline{u'_x u'_\varphi} \frac{\partial U_\varphi}{\partial x} + \overline{u'_r u'_\varphi} \frac{\partial U_\varphi}{\partial r} + \overline{u'_\varphi u'_\varphi} \frac{U_r}{r}) \quad (\text{B.7})$$

$$P_{r\varphi} = -\overline{u'_x u'_\varphi} \frac{\partial U_r}{\partial x} - \overline{u'_r u'_\varphi} (\frac{\partial U_r}{\partial r} + \frac{U_r}{r}) - \overline{u'_x u'_r} \frac{\partial U_\varphi}{\partial x} - \overline{u'_r u'_r} \frac{\partial U_\varphi}{\partial r} + \overline{u'_\varphi u'_\varphi} \frac{U_\varphi}{r} \quad (\text{B.8})$$

$$P_{rx} = -\overline{u'_x u'_r} \frac{\partial U_x}{\partial x} - \overline{u'_r u'_r} \frac{\partial U_x}{\partial r} - \overline{u'_x u'_x} \frac{\partial U_r}{\partial x} - \overline{u'_x u'_r} \frac{\partial U_r}{\partial r} + \overline{u'_x u'_\varphi} \frac{U_\varphi}{r} \quad (\text{B.9})$$

$$P_{\varphi x} = -\overline{u'_x u'_\varphi} \frac{\partial U_x}{\partial x} - \overline{u'_r u'_\varphi} \frac{\partial U_x}{\partial r} - \overline{u'_x u'_x} \frac{\partial U_\varphi}{\partial x} - \overline{u'_x u'_r} \frac{\partial U_\varphi}{\partial r} + \overline{u'_x u'_\varphi} \frac{U_r}{r} \quad (\text{B.10})$$

$$P_k = -(\overline{u'_x u'_x} \frac{\partial U_x}{\partial x} + \overline{u'_x u'_r} \frac{\partial U_x}{\partial r} + \overline{u'_x u'_r} \frac{\partial U_r}{\partial x} + \overline{u'_r u'_r} \frac{\partial U_r}{\partial r} + \overline{u'_x u'_\varphi} \frac{\partial U_\varphi}{\partial x} \quad (\text{B.11})$$

$$+ \overline{u'_r u'_\varphi} (\frac{\partial U_\varphi}{\partial r} - \frac{U_\varphi}{r}) + \overline{u'_\varphi u'_\varphi} \frac{U_r}{r}) \quad (\text{B.12})$$

C Sekundärströmungen in Kanälen mit nicht kreisförmigem Querschnitt

In turbulenten Strömungen durch Kanäle mit nicht kreisförmigem Querschnitt bilden sich durch Turbulenz hervorgerufene Sekundärströmungen aus. Bild C.1 zeigt die Skizze solcher Sekundärströmungen in einem Kanal mit quadratischem Strömungsquerschnitt. Diese Sekundärströmungen werden als Sekundärströmungen zweiter Art bezeichnet. Sie sind von Sekundärströmungen erster Art zu unterscheiden, die durch das Auftreten von Druckgradienten oder Inertialkräften wie Systemrotation hervorgerufen werden können.

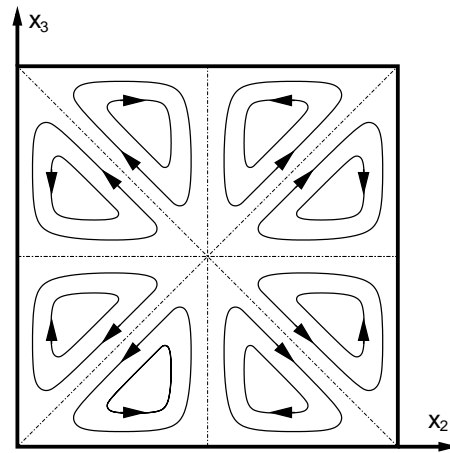


Bild C.1: Sekundärströmungen in Kanälen mit quadratischem Querschnitt

Das Fluid wird durch die Sekundärströmungseffekte entlang der Winkelhalbierenden des Strömungsquerschnitts in dessen Ecken transportiert. Entlang jeder Winkelhalbierenden bildet sich je ein Wirbelpaar aus. Im skizzierten Fall treten vier Eckenwirbelpaare auf. Die Entstehung dieser Sekundärströmung wird durch die unterschiedlich großen Werte der Normalspannungskomponenten $\overline{u'_2 u'_2}$ und $\overline{u'_3 u'_3}$ des Reynolds Spannungstensors hervorgerufen.

Grundlage der Untersuchungen zur Entstehung der Sekundärströmungen zweiter Art ist oft die Transportgleichung des Wirbelstromvektors $\vec{\omega}$ ($\vec{\omega} = \nabla \times \vec{u}$), die nachfolgend in symbolischer Schreibweise aufgeführt ist

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + \vec{u} \nabla \vec{\omega} = \vec{\omega} \nabla \vec{u} + \nu \nabla^2 \vec{\omega} \quad (\text{C.1})$$

Betrachtet man die longitudinale Komponente des Wirbelstromvektors in einer statistisch stationären, voll ausgebildeten zweidimensionalen Strömung, ergibt sich in Tensornotation Gleichung (C.2) für den Transport von $\omega_1 = (\frac{\partial \overline{u_3}}{\partial x_2} - \frac{\partial \overline{u_2}}{\partial x_3})$ in der Reynolds gemittelten Betrachtungsweise:

$$\overline{u_2} \frac{\partial \omega_1}{\partial x_2} + \overline{u_3} \frac{\partial \omega_1}{\partial x_3} = \omega_j \frac{\partial \overline{u_1}}{\partial x_j} - \left(\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right) \overline{u'_2 u'_3} + \frac{\partial^2}{\partial x_3 \partial x_2} \left(\overline{u'_2 u'_2} - \overline{u'_3 u'_3} \right) + \nu \left(\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right) \omega_1 \quad (\text{C.2})$$

Der erste Term auf der rechten Seite der Gleichung (C.2) ist im vorliegenden Fall von untergeordneter Bedeutung. Der zweite und dritte Term auf der rechten Seite der Gleichung sind die Gradienten der turbulenten Anisotropie und der turbulenten Schubspannungskomponente, die die turbulenzbedingte Produktion von ω_1 beschreiben. Der vierte Term ist ein Senkenterm von ω_1 aufgrund viskoser Dissipation.

Aus Gleichung (C.2) lässt sich direkt ableiten, dass lineare Wirbelviskositätsmodelle nicht in der Lage sind, Sekundärströmungen zweiter Art zu berechnen, da sie die Normalspannungskomponenten immer gleich groß berechnen.

Es hat sich aber gezeigt, dass unter Umständen auch nichtlineare Turbulenzmodelle die Sekundärströmung entweder gar nicht oder aber mit der umgekehrten Orientierung vorhersagen [46]. Der Grund für dieses Verhalten liegt in der Kalibrierung der freien Modellkoeffizienten. Größe und Vorzeichen der Koeffizienten können die korrekte Berechnung des Schlüsselterms aus Gleichung (C.2), der Differenz der Normalspannungskomponenten, verhindern. Wie die nachfolgende Ableitung zeigt, trifft dies auch auf das in Abschnitt 2.4.7 beschriebene Modell von Craft, Iacovides und Yoon [8] zu. Bei diesem Modell berechnen sich die interessierenden Normalspannungskomponenten zu:

$$\begin{aligned} \overline{u'_2 u'_2} = & \frac{2}{3} \rho k - \nu_t S_{22} + c_1 \nu_t \left(\frac{k}{\epsilon} \right) \left(S_{22}^2 + S_{12}^2 + S_{23}^2 - \frac{1}{3} S_{kl} S_{kl} \right) \\ & - 2c_2 \nu_t \left(\frac{k}{\epsilon} \right) \left(S_{12} W_{12} - S_{23} W_{23} \right) \\ & + c_3 \nu_t \left(\frac{k}{\epsilon} \right) \left(W_{12}^2 + W_{23}^2 - \frac{1}{3} W_{lk} W_{lk} \right) \\ & + 2c_4 \nu_t \left(\frac{k}{\epsilon} \right)^2 \left(S_{k2} W_{l2} \right) S_{kl} \\ & + c_6 \nu_t \left(\frac{k}{\epsilon} \right)^2 \left(S_{22} S_{kl} S_{kl} \right) \\ & + c_7 \nu_t \left(\frac{k}{\epsilon} \right)^2 \left(W_{22} W_{kl} W_{kl} \right) \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

$$\begin{aligned}
\overline{u'_3 u'_3} = & \frac{2}{3} \rho k - \nu_t S_{33} + c_1 \nu_t \left(\frac{k}{\epsilon} \right) \left(S_{33}^2 + S_{13}^2 + S_{23}^2 - \frac{1}{3} S_{kl} S_{kl} \right) \\
& - 2c_2 \nu_t \left(\frac{k}{\epsilon} \right) \left(S_{13} W_{13} - S_{23} W_{23} \right) \\
& + c_3 \nu_t \left(\frac{k}{\epsilon} \right) \left(W_{13}^2 + W_{23}^2 - \frac{1}{3} W_{lk} W_{lk} \right) \\
& + 2c_4 \nu_t \left(\frac{k}{\epsilon} \right)^2 \left(S_{k3} W_{l3} \right) S_{kl} \\
& + c_6 \nu_t \left(\frac{k}{\epsilon} \right)^2 \left(S_{33} S_{kl} S_{kl} \right) \\
& + c_7 \nu_t \left(\frac{k}{\epsilon} \right)^2 \left(W_{33} W_{kl} W_{kl} \right)
\end{aligned} \tag{C.4}$$

Zur Vereinfachung der Ausdrücke (C.3) und (C.4) erfolgt für den vorliegenden Fall eine Größenordnungsabschätzung der Geschwindigkeitsgradienten (C.5), um die Tensorelemente in (C.3) und (C.4) approximieren zu können. Grundlage der Abschätzung ist der Umstand, dass die Sekundärströmung durch die Ecken hervorgerufen wird und die Hauptströmungsrichtung die x_1 Komponente ist. In Wandnähe kann man dann folgende Abschätzung vornehmen.

$$\frac{\partial \overline{u_1}}{\partial x_2}, \frac{\partial \overline{u_1}}{\partial x_3} \gg \frac{\partial \overline{u_2}}{\partial x_2}, \frac{\partial \overline{u_2}}{\partial x_3}, \frac{\partial \overline{u_3}}{\partial x_2}, \frac{\partial \overline{u_3}}{\partial x_3} \tag{C.5}$$

Daraus ergibt sich für die einzelnen Tensorelemente nachfolgende Approximationen.

$$S_{11} = \left(\frac{\partial \overline{u_1}}{\partial x_1} + \frac{\partial \overline{u_1}}{\partial x_1} \right) \cong 0 \qquad W_{11} = \left(\frac{\partial \overline{u_1}}{\partial x_1} - \frac{\partial \overline{u_1}}{\partial x_1} \right) \cong 0 \tag{C.6}$$

$$S_{12} = \left(\frac{\partial \overline{u_1}}{\partial x_2} + \frac{\partial \overline{u_2}}{\partial x_1} \right) \cong \frac{\partial \overline{u_1}}{\partial x_2} \qquad W_{12} = \left(\frac{\partial \overline{u_1}}{\partial x_2} - \frac{\partial \overline{u_2}}{\partial x_1} \right) \cong \frac{\partial \overline{u_1}}{\partial x_2} \tag{C.7}$$

$$S_{13} = \left(\frac{\partial \overline{u_1}}{\partial x_3} + \frac{\partial \overline{u_3}}{\partial x_1} \right) \cong \frac{\partial \overline{u_1}}{\partial x_3} \qquad W_{13} = \left(\frac{\partial \overline{u_1}}{\partial x_3} - \frac{\partial \overline{u_3}}{\partial x_1} \right) \cong \frac{\partial \overline{u_1}}{\partial x_3} \tag{C.8}$$

$$S_{22} = \left(\frac{\partial \overline{u_2}}{\partial x_2} + \frac{\partial \overline{u_2}}{\partial x_2} \right) \cong 0 \qquad W_{22} = \left(\frac{\partial \overline{u_2}}{\partial x_2} - \frac{\partial \overline{u_2}}{\partial x_2} \right) \cong 0 \tag{C.9}$$

$$S_{23} = \left(\frac{\partial \overline{u_2}}{\partial x_3} + \frac{\partial \overline{u_3}}{\partial x_2} \right) \cong 0 \qquad W_{23} = \left(\frac{\partial \overline{u_2}}{\partial x_3} - \frac{\partial \overline{u_3}}{\partial x_2} \right) \cong 0 \tag{C.10}$$

$$S_{33} = \left(\frac{\partial \overline{u_3}}{\partial x_3} + \frac{\partial \overline{u_3}}{\partial x_3} \right) \cong 0 \qquad W_{33} = \left(\frac{\partial \overline{u_3}}{\partial x_3} - \frac{\partial \overline{u_3}}{\partial x_3} \right) \cong 0 \tag{C.11}$$

Das Einsetzen der Approximationen (C.6)-(C.11) in die Ausdrücke (C.3)-(C.4) führt unter anderem auch dazu, dass die kubischen Terme in den Ausdrücken für die zwei betrachteten Komponenten des Reynolds-Spannungstensors ausnahmslos verschwinden. Es ergibt sich der folgende vereinfachte Ausdruck für die Normalspannungsdifferenz

$$(\overline{u'_2 u'_2} - \overline{u'_3 u'_3}) = \left[\nu_t \left(\frac{k}{\epsilon} \right) \left(\left(\frac{\partial \overline{u_1}}{\partial x_2} \right)^2 - \left(\frac{\partial \overline{u_1}}{\partial x_3} \right)^2 \right) \right] (c_1 - 2c_2 + c_3) \quad (\text{C.12})$$

Gleichung (C.12) macht deutlich, dass die Ausprägung der berechneten Sekundärströmung zweiter Art von der Kalibration der Modellkoeffizienten abhängt. Das Einsetzen der in Tabelle 2.7 aufgeführten Werte für die freien Modellkoeffizienten ergibt, dass durch die Wahl der Koeffizienten die korrekte Berechnung dieses Strömungstyps verhindert wird.

$$(c_1 - 2c_2 + c_3) = -0,04 \quad (\text{C.13})$$

D Mischungsvorgänge

Mischung kann als Übergang eines Systems vom Anfangszustand der vollständigen Trennung bezüglich einer betrachteten Größe zum Endzustand der völligen Gleichförmigkeit angesehen werden. Bei den Mischungsvorgängen in Gasturbinenbrennkammern vermischen sich kältere Sekundärluft mit dem heißen Primärmassenstrom. Die Temperatur ist in diesem Fall die betrachtete Strömungsgröße. Diese Mischungsvorgänge sollen entsprechend obiger Zielsetzung zur Minimierung von Stickoxidemissionen möglichst schnell zu einem möglichst gleichförmigen Temperaturfeld in der Brennkammer führen und sind daher in ihrer Zielsetzung von Mischungsvorgängen zu unterscheiden, die der Bauteilkühlung dienen. Hier wird gerade kein möglichst schnelles Erreichen eines homogenen Endzustandes gewünscht.

Untersuchungen von Mischungsvorgängen nicht reagierender Strömungen bedienen sich oft ebenfalls der Temperatur als Messgröße zur Bestimmung des Mischungsfelds, da, wie in Abschnitt 2.2.4 gesehen, das Mischungsfeld zweier Fluide unterschiedlicher Konzentration identisch zum Mischungsfeld eines Fluids unterschiedlicher Temperatur ist. Die nachfolgend angegebenen Beziehungen zur Quantifizierung der Mischung ist an das von Blomeyer [7] angegebene Vorgehen angelehnt.

Zur Quantifizierung der Mischung wird das Temperaturfeld zunächst durch Einführung einer dimensionslosen Temperatur (D.1) normiert. Vor dem Eindüsen der Sekundärluft hat der Primärmassenstrom die Temperatur $\theta_\infty = 1$ und der Sekundärmassenstrom entsprechend die Temperatur $\theta_j = 0$.

$$\theta = \frac{T - T_j}{T_\infty - T_j} = \quad \theta_\infty = 1, \quad \theta_j = 0 \quad (\text{D.1})$$

Die beiden Teilströme vermischen sich und erreichen den Zustand der völligen Gemischtheit, wenn überall im Feld die adiabate Mischtemperatur θ_{adb} vorliegt, die sich aus der Enthalpiebilanz der Massenströme vor und nach der Mischung ergibt.

$$c_p(\dot{m}_j + \dot{m}_\infty)\theta_{adb} = c_p\dot{m}_j\theta_j + c_p\dot{m}_\infty\theta_\infty \quad (\text{D.2})$$

Wird von einer konstanten Wärmekapazität c_p ausgegangen und die dimensionslosen Temperaturen $\theta_j = 0$ und $\theta_\infty = 1$ in Beziehung (D.2) eingesetzt, ergibt sich die adiabate Mischtemperatur zu

$$\theta_{adb} = \frac{\dot{m}_\infty}{\dot{m}_j + \dot{m}_\infty} \quad (\text{D.3})$$

Die Abweichung des Temperaturfeldes von der adiabaten Mischtemperatur ist Maß für die Ungemischtheit des Strömungsfeldes. In realen Strömungen treten jedoch Wärmeverluste auf. Daher muss die sich tatsächlich ergebende adiabate Mischtemperatur als Bezugstemperatur aus der massenstromgewichteten Summe der gemessenen Temperaturen θ_i einer Messebene bestimmt werden.

$$\theta_{adb,lokal} = \frac{1}{(\dot{m}_j + \dot{m}_\infty)} \sum_{i=1}^N \dot{m}_i \theta_i \quad (D.4)$$

Mit Hilfe von Gleichung (D.4) kann die Ungemischtheit des Strömungsfeldes in Form einer Standardabweichung quantifiziert werden.

$$\sigma_{adb} = \sqrt{\sum_{i=1}^N \frac{\dot{m}_i}{\dot{m}_j + \dot{m}_\infty} (\theta_i - \theta_{adb,lokal})^2} \quad (D.5)$$

Die Standardabweichung in Gleichung (D.5) wird für den völlig ungemischten Zustand maximal, bei dem das Mischungsfeld nur aus den Extremalwerten θ_j und θ_∞ besteht. Die adiabate Mischtemperatur erhält man in diesem Fall durch Einsetzen von Beziehung (D.1) in Gleichung (D.4) und entspricht dem massenstromgewichteten Anteil der Hauptstromtemperatur. Die maximale Standardabweichung ergibt sich zu

$$\sigma_{adb,max} = \sqrt{\theta_{adb}(1 - \theta_{adb})} \quad (D.6)$$

Normiert man die durch Gleichung (D.5) gegebene Standardabweichung mit der maximalen Standardabweichung in Gleichung (D.6), erhält man einen Indikator für den Mischungszustand, der für den vollständig gemischten Zustand $\sigma_{adb,norm} = 0$ und für den ungemischten Zustand $\sigma_{adb,norm} = 1$ wird.

Die Bestimmung massengewichteter Größen setzt die Kenntnis des Strömungsfeldes voraus. In den allermeisten Fällen wird bei Mischungsuntersuchungen jedoch auf die Bestimmung des Strömungsfeldes verzichtet (oder bei Messungen des Geschwindigkeitsfeldes das Mischungsfeld vernachlässigt). In diesen Fällen wird die Massenstromgewichtung durch eine Flächengewichtung ersetzt. Die mittlere flächengewichtete Temperatur einer Messebene ergibt sich dann gemäß (D.7) und vereinfacht sich für ein äquidistantes Messraster auf das arithmetische Mittel.

$$\theta_m = \frac{1}{A} \sum_{i=1}^N A_i \theta_i \quad \theta_m = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \theta_i \quad (\text{D.7})$$

Mit der so gewonnenen mittleren Temperatur ergeben sich entsprechend die Standardabweichungen zu

$$\sigma_m = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (\theta_i - \theta_m)^2} \quad (\text{D.8})$$

$$\sigma_{m,max} = \sqrt{\theta_m(1 - \theta_m)} \quad (\text{D.9})$$

$$\sigma_{m,norm} = \frac{\sigma_m}{\sigma_{m,max}} \quad (\text{D.10})$$

Bei homogener Zuströmung gehen beide Mittelungsmethoden ineinander über, da dann bei äquidistantem Messgitter die Teilmassenströme wegen der konstanten Geschwindigkeit ebenfalls konstant sind. Bei stark dreidimensionalem Strömungsfeld in der Nähe der Einblaseebene ist der Unterschied von Bedeutung. Weiter stromab verliert die Gewichtungsmethode mit zunehmender Homogenisierung des Strömungsfelds kontinuierlich an Bedeutung.

Literatur

- [1] ABID, R., C. RUMSEY und T. GATSKI: *Prediction of nonequilibrium turbulent flows with explicit algebraic stress models*. AIAA Journal, 33(11):2026–2031, November 1995.
- [2] AEA TECHNOLOGY ENGINEERING SOFTWARE LTD.: *CFX-TASCflow theory documentation version 2.11*. Waterloo, Canada, 2001.
- [3] ANDREOPOULOS, J.: *Heat transfer measurements in a heated jet-pipe flow issuing into a cold cross stream*. Phys. Fluids, 126:3201–3210, 1983.
- [4] ANDREOPOULOS, J. und W. RODI: *Experimental investigation of jets in a crossflow*. J. Fluid Mech., 138:93–127, 1984.
- [5] APSLEY, D.D. und M.A. LESCHZINER: *A new low-Reynolds-number non-linear two-equation turbulence model for complex flows*. Int. J. Heat Fluid Flow, 19:209–222, 1998.
- [6] BAUER, W.: *Berechnung turbulenter Strömungen mit starken Stromlinienkrümmungen beziehungsweise mit Rotation*. Doktorarbeit, TU Darmstadt, 1998.
- [7] BLOMEYER, M.: *Entwicklung von Auslegungskriterien für die Mischzone einer luftgestuften Gasturbinenringbrennkammer*. Doktorarbeit, TU Darmstadt, 1999.
- [8] CRAFT, T.J., H. IACOVIDES und J.H. YOON: *Progress in the use of non-linear two-equation models in the computation of convective heat-transfer in impinging and separated flows*. Flow, Turbulence and Combustion, 63:59–80, 2000.
- [9] CRAFT, T.J., B.E. LAUNDER und K. SUGA: *Development and application of a cubic eddy-viscosity model of turbulence*. Int. J. Heat Fluid Flow, 17:108–115, 1996.
- [10] DENTON, J.D. und L. XU: *Understanding three dimensional flow in turbomachinery*. In: PAPAILIOU, K.D., D. TSAHALIS, J. PÉRIAUX und D. KNÖRZER (Herausgeber): *Computational Fluid Dynamics '98*, Band 2, Seiten 57–70. Wiley, 1998.
- [11] DOERR, TH.: *Ein Beitrag zur Reduzierung des Stickoxydausstosses von Gasturbinenbrennkammern - Die Optimierung des Mischungsprozesses der Fett-Mager-Stufenverbrennung*. Doktorarbeit, Darmstadt, 1995.
- [12] DUSSAUGE, J.P., H.H. FERNHOLZ, J.P. FINLEY, R.W. SMITH, A.J. SMITS und E.F. SPINA: *Turbulent boundary layers in subsonic flow*. AGARDograph, 335, 1995.
- [13] FERZIGER, J. H.: *Large eddy numerical simulations of turbulent flows*. AIAA-Paper, 76-347, 1976.

-
- [14] FERZIGER, J.H. und M. PERIĆ: *Computational methods for fluid dynamics*. Springer Verlag, Berlin, 1999.
 - [15] FLUID DYNAMICS PANEL WORKING GROUP 21: *A selection of test cases for the validation of large-eddy simulations of turbulent flows*. Technischer Bericht AR-345, AGARD, 1998.
 - [16] GATSKI, T.B., M.Y. HUSSAINI und J.L. LUMLEY (Herausgeber): *Simulation and modeling of turbulent flows*. ICASE/LaRC Series in Computational Science and Engineering. Oxford University Press, Oxford, 1996.
 - [17] GATSKI, T.B. und C.G. SPEZIALE: *On explicit algebraic stress models for complex turbulent flows*. J. Fluid Mech., 254:59–78, 1993.
 - [18] GRIEB, H. und B. SIMON: *Pollutant emissions of existing and future engines for commercial aircraft*. In: SCHUMANN, U. (Herausgeber): *Lecture notes in engineering, air traffic and the environment - background, tendencies and potential global atmospheric effects*, Seiten 41–83. Springer, 1990.
 - [19] GRUNERT, K.: *Untersuchungen zur Turbulenzmodellierung und Berechnung verdrallter Innenströmungen*. Doktorarbeit, TU Berlin, 2000.
 - [20] GUPTA, A.K., D.G. LILLEY und N. SYRED: *Swirl flows*. Abacus Press, Cambridge, Massachusetts 02139, USA, 1985.
 - [21] HALLBÄCK, M., D.S. HENNINGSON, A.V. JOHANSSON und P.H. ALFREDSSON (Herausgeber): *Turbulence and transition modelling*. ERCOFTAC Series. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands, 1996.
 - [22] HEINRICH, C.: *Numerische Berechnung gasturbinentypischer Mischungsvorgänge mit vollständigen Turbulenzmodellen zweiter Ordnung*. Doktorarbeit, TU Darmstadt, 2000.
 - [23] HEINRICH, C., S. GEISS, E.P. HASSEL und J.JANICKA: *Modellierung und experimentelle Modellierung von Mischungsvorgängen in Gasturbinenbrennkammern*. Technischer Bericht, KEROMIX: Stabile schadstoffarme Magerverbrennung, 1999.
 - [24] HOLZÄPFEL, F.: *Zur Turbulenzstruktur freier und eingeschlossener Drehströmungen*. Doktorarbeit, TU Karlsruhe, 1996.
 - [25] HOLZÄPFEL, F., B. LENZE und W. LEUCKEL: *Quintuple hot-wire measurements of the turbulence structure in confined swirling flows*. ASME J. Fluids Eng., 121:517–525, September 1999.
 - [26] IPCC WORKING GROUPS I, III: *Aviation and the global atmosphere*. Technischer Bericht, IPCC/ICAO, 1999.

-
- [27] JISCHA, M.: *Konvektiver Impuls-, Wärme- und Stoffaustausch*. Vieweg Verlag, Wiesbaden, 1982.
- [28] KRAUTKREMER, B.: *Grundlegende experimentelle Untersuchungen der Mischungsvorgänge drallbehafteter Strömungen in Gasturbinenbrennkammern*. Doktorarbeit, TU Darmstadt, 2003.
- [29] LAUNDER, B.E., G.J. REECE und W. RODI: *Progress in the development of a Reynolds-stress turbulence closure*. J. Fluid Mech., 68:537–566, 1975.
- [30] LAUNDER, B.E. und D.B. SPALDING: *The numerical computation of turbulent flow*. Comp. Meth. Appl. Mech. and Eng., 3:269–289, 1974.
- [31] LIEN, F.S. und M.A. LESCHZINER: *A general non-orthogonal collocated finite volume algorithm for turbulent flow at all speeds incorporating second-moment turbulence transport closure, Part 1: Computational implementation*. Computer methods in applied mechanics and engineering, 114:123–148, 1994.
- [32] LUMLEY, J.L.: *Computational modeling of turbulent flows*. Adv. Appl. Mech., 18:123–176, 1978.
- [33] LUO, J. und B. LAKSHMINARAYANA: *Prediction of strongly curved turbulent duct flows with Reynolds stress model*. Technischer Bericht AIAA 95-2241, AIAA, 26th AIAA Fluid Dynamics Conference, San Diego, CA, June 1995.
- [34] MARGASON, R.J.: *Fifty years of jet in cross flow research*. In: *AGARD 72nd symposium on 'Computational and Experimental Assessment of Jets in Cross Flow'*, Winchester, U.K., April 1993. AGARD CP-534.
- [35] MARTÍN, M.P., U. PIOMELLI und G.V. CANDLER: *Subgrid-scale models for compressible large-eddy simulations*. Theoret. Comput. Fluid Dynamics, 13:361–376, 2000.
- [36] MENTER, F.R.: *Two-equation eddy-viscosity turbulence models for engineering applications*. AIAA Journal, 32(8):1598–1605, August 1994.
- [37] MENTER, F.R., M. KUNTZ und R. LANGTRY: *Ten years of industrial experience with the SST turbulence model*. In: HANJALIĆ, K., Y. NAGANO und M. TUMMERS (Herausgeber): *Turbulence, Heat and Mass Transfer 4*. Begell House, 2003.
- [38] MIGUEIS, C. E.: *Untersuchungen zur Optimierung der Mischzone einer fett-mager gestuften Ringbrennkammer*. Doktorarbeit, DLR Forschungsbericht 96-33, 1996.
- [39] PATANKAR, S.V.: *Numerical heat transfer and fluid flow*. Computational and Physical Processes in Mechanics and Thermal Sciences. Hemisphere Publishing Corporation, New York, New York, 1980.

-
- [40] PETTERSSON-REIF, B.A., P.E.H. ABRAHAMSEN, H.I. ANDERSSON und S. SOLBAKKEN: *Modelling rotational effects in industrial closure models*. In: *Turbulence and Shear Flow Phenomena*, Band 2, Seiten 461–466, 2001.
- [41] PETTERSSON-REIF, B.A., P.A. DURBIN und A.OOI: *Modeling rotational effects in eddy-viscosity closures*. *Int. J. Heat Fluid Flow*, 20:563–573, 1999.
- [42] RHIE, C.M. und W.L. CHOW: *A numerical study of the turbulent flow past an isolated airfoil with trailing edge separation*. *AIAA Journal*, 21:1525–1532, 1983.
- [43] ROTHE, T.: *Der Einfluß der Rotation auf die Strömung und den Wärmetransport im turbulent durchströmten Ringspalt zwischen zwei rotierenden Wellen*. Doktorarbeit, TU Darmstadt, 1994.
- [44] ROTTA, J.C.: *Turbulente Strömungen*. Teubner, Stuttgart, 1972.
- [45] RUNG, T.: *Entwicklung anisotroper Wirbelzähigkeitsbeziehungen mit Hilfe von Projektionstechniken*. Doktorarbeit, TU Berlin, 2000.
- [46] RUNG, T., H. LÜBCKE, F. THIELE, S. FU, C. WANG und Y. GUO: *Turbulence closure model constraint derived from stress-induced secondary flow*. *AIAA Journal*, 38:1756–1758, 2000.
- [47] SCHÄFER, M.: *Numerik im Maschinenbau*. Springer Verlag, Berlin, 1999.
- [48] SHIH, T.-H., J. ZHU und J.L. LUMLEY: *A realizable Reynolds stress algebraic equation model*. Technischer Bericht 105993, NASA, 1993.
- [49] SPALART, P.R. und S.R. ALLMARAS: *A one-equation turbulence model for aerodynamic flows*. AIAA paper, 92-0439, 1992.
- [50] SPALART, P.R., W.-H. JOU, M. STRELETS und S.R. ALLMARAS: *Comments on the feasibility of LES for wings and on a hybrid RANS/LES approach*. In: LIU, C. und Z. LIU (Herausgeber): *Advances in DNS/LES*, Columbus, OH, 1997. 1st AFOR Int. conf. on DNS/LES, Aug. 4-8 1997, Ruston, LA, Greyden Press.
- [51] SPEZIALE, C.G., S. SARKAR und T.B. GATSKI: *Modelling the pressure-strain correlation of turbulence: An invariant dynamical systems approach*. *J. Fluid Mech.*, 227:245–272, 1991.
- [52] SPEZIALE, C.G., B.A. YOUNIS und S.A. BERGER: *Analysis and modelling of turbulent flow in an axially rotating pipe*. *J. Fluid Mech.*, 407:1–26, 2000.
- [53] SPURK, J. H.: *Strömungslehre*. Springer Verlag, Berlin, 1989.

-
- [54] STRELETS, M.: *Detached eddy simulation of massively separated flows*. Technischer Bericht, AIAA-2001-0879, January, 2001. 39th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit, Reno, NV.
 - [55] TENNEKES, H. und J.L. LUMLEY: *A first course in turbulence*. The MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 1972.
 - [56] WALLIN, S. und A.V. JOHANSSON: *An explicit algebraic Reynolds stress model for incompressible and compressible flows*. J. Fluid Mech., 403:89–132, 2000.
 - [57] WILCOX, D.C.: *Reassessment of the scale-determining equation for advanced turbulence models*. AIAA-Journal, 26(11):1299–1310, 1988.
 - [58] WILCOX, D.C.: *Turbulence modeling for CFD*. DCW Industries Inc., La Cañada, California, 1994.